UNI Graz
TU Graz

H. Gausterer, W. Schweiger
C. Stelzer, N. Weber

Funktionalanalysis **WS 21/22**

2. Übungstest, 27. Jänner 2022

Aufgabe 1: Das einseitige Faltungsintegral ist durch

$$(f * g)(t) = \int_0^t ds\ f(t-s)g(s)$$

gegeben. Für die Laplacetransformation gilt dann $L(f * g) = L(f)L(g)$. Benutzen Sie das Faltungsintegral, um die inverse Laplacetransformierte von

$$\frac{1}{(p^2+9)^2} = \frac{1}{p^2+9}\,\frac{1}{p^2+9}$$

zu berechnen.
Hinweis: Die Laplacetransformierte von $h(t) = \sin(\alpha t)$ ist

$$H(p) = L(h)(p) = \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}.$$

Um das Faltngsintegral zu berechnen, ist es zweckmäßig

$$\sin(\phi)\sin(\psi) = \frac{1}{2}\left[\cos(\phi-\psi) - \cos(\phi+\psi)\right]$$

zu verwenden.

(5 Punkte)

Aufgabe 2: Betrachten Sie den Translationsoperator

$$T_a : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \qquad (T_a f)(x) = f(x+a).$$

a) Zeigen Sie, dass es ein linearer Operator ist.
b) Zeigen Sie, dass der Operator beschränkt ist.
c) Finden Sie den zu T_a adjungierten Operator $T_a^\dagger$.
d) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\psi_k(x) = e^{ikx}$, $k \in \mathbb{R}$ Lösungen der "Eigenwertgleichung" $T_a\psi_k = \lambda_k\psi_k$ sind. Was sind die entsprechenden "Eigenwerte" λ_k?

Bemerkung: Da $\psi_k \notin L^2(\mathbb{R})$, gehören die λ_k zum kontinuierlichen Spektrum von T_a.

(5 Punkte)

Aufgabe 3: Berechnen Sie den Integralkern $K(p)$ der (temperierten) Distribution $K = FT(\delta'_{x_0})$, d.h. von der Distribution, die durch Fouriertransformation der Ableitung der Deltadistribution entsteht.

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass Ableitung und Fouriertransformation einer Distribution T durch $\langle T', \phi\rangle = -\langle T, \phi'\rangle$ bzw. $\langle FT(T), \phi\rangle = \langle T, FT(\phi)\rangle$ gegeben sind und berechnen Sie $\frac{d}{dx}FT(\phi)(x)$ explizit.

(5 Punkte)

Aufgabe 4: Die stationäre Wellenfunktion eines quantenmechanischen Teilchens, welches sich in 1 Raumdimension unter Einfluss eines (anziehenden) δ-Potentials bewegt, wird durch die Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) - V_0\delta(x)\,\psi(x) = E\,\psi(x)$$

($m > 0\ldots$ Teilchenmasse, $\hbar\ldots$ Planck'sches Wirkungsquant) beschrieben, wobei $\delta(x)$ die Dirac'sche Deltafunktion ist. Eine quadratintegrierbare (distributionelle) Lösung dieser Gleichung ergibt sich für $E < 0$. Sie kann in der Form

$$\psi(x) = N\left(\theta(-x)e^{\kappa x} + \theta(x)e^{-\kappa x}\right)$$

geschrieben werden, wobei N eine Normierungskonstante ist und κ so zu wählen ist, dass die obige Schrödingergleichung erfüllt wird. Für die Stufenfunktion $\theta(x)$ nehmen wir die Definition

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases},$$

um sicherzustellen, dass die Lösung bei $x = 0$ stetig ist.

a) Bringen Sie die Schrödingergleichung auf die Form

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) - \kappa^2\psi(x) = \alpha\,\delta(x)\psi(x) \qquad (*)$$

Wie hängen dann E und κ bzw. α und V_0 zusammen?

b) Setzen Sie $\psi(x)$ in Gleichung $(*)$ ein und bestimmen Sie κ so, dass die Gleichung erfüllt wird. Sie können dabei $\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x)$ benutzen. Es ist auch zweckmäßig, immer wenn ein Ausdruck der Form $f(x)\delta(x)$ auftaucht, diesen gleich durch $f(0)\delta(x)$ zu ersetzen.

c) Wie hängt letztendlich die Bindungsenergie E von V_0 ab?

(5 Punkte)

Viel Glück!