Übungen zu Funktionalanalysis (für PhysikerInnen)

1. Test, 25. November 2021

Name:

Matrikelnummer:

Platz Nr.:

UNI: Gruppe Gausterer ○

Gruppe Schweiger ○

TU: Gruppe 1 ○

Gruppe 2 ○

Gruppe 3 ○

Aufgabe 1:	3,5	Punkte
Aufgabe 2:	2.5	Punkte
Aufgabe 3:	0.5	Punkte
Aufgabe 4:	4.	Punkte
Gesamt:	10.5	Punkte

UNI Graz
TU Graz

H. Gausterer, W. Schweiger
C. Stelzer, N. Weber

Funktionalanalysis **WS 21/22**

1. Übungstest, 25. November 2021

Aufgabe 1: Laguerre-Polynome $L_n(x)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, lassen sich mit Hilfe der Rekursionsrelation

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)\, L_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

gewinnen, wobei man mit $L_0(x) = 1$ und $L_1(x) = (1-x)$ startet. Die Funktionen $\varphi_n(x) := e^{-x/2}L_n(x)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, stellen dann eine Orthonormalbasis von $L^2(0, \infty)$ dar, erfüllen also die Orthonormalitätsrelation

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \int_0^\infty dx\, \varphi_n(x)\, \varphi_m(x) = \int_0^\infty dx\, e^{-x}\, L_n(x)\, L_m(x) = \delta_{nm}\,.$$

a) Berechnen Sie $L_2(x)$ und $L_3(x)$. **(1 Punkt)**

b) Drücken Sie $f(x) = x^2$ durch Laguerre-Polynome aus. **(2 Punkte)**

c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\infty dx\, e^{-x}\, x^2\, L_n(x)\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

(2 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie in c) das Ergebnis aus b).

Aufgabe 2: In $L^2[-1,1]$, dem Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf dem Intervall $[-1,1]$, sei eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & -1 \le x < 0 \\ e^{-nx} & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

definiert.

a) Skizzieren Sie $f_1(x)$ und ein $f_n(x)$ für $n > 1$. Was passiert mit zunehmendem n? **(1 Punkt)**

b) Diese Funktionenfolge konvergiert punktweise auf $[-1,1]$. Wie sieht die Grenzfunktion $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ aus? **(1 Punkt)**

c) Beweisen Sie, dass auch $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_2 = 0$ gilt, f_n also auch bezüglich der L^2-Norm gegen f konvergiert. **(2 Punkte)**

d) Konvergiert f_n auf $[-1,1]$ auch gleichmäßig gegen f? Begründen Sie Ihre Antwort. **(1 Punkt)**

Aufgabe 3: Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 2 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases},$$

die auf dem Intervall $0 < x < \pi$ gegeben ist. Setzen Sie obige Funktion auf das Intervall $(-\pi, \pi)$ so fort, dass Sie zu einer ungeraden Funktion $g(x) = -g(-x)$ gelangen, die im Intervall $(0, \pi)$ mit $f(x)$ übereinstimmt, d.h. $g(x) = f(x)$ für $0 < x < \pi$.

a) Skizzieren Sie den Verlauf von $g(x)$ im Intervall $-3\pi < x < 3\pi$, wenn $g(x)$ als periodische Funktion mit Periodenlänge 2π aufgefasst wird.

(1 Punkte)

b) Ermitteln Sie die reelle Form der Fourierreihe von $g(x)$ (Periodizitätsintervall $(-\pi, \pi)$).

(3 Punkte)

c) Welchen Wert nimmt $FR(g)(x)$ bei $-\pi$, $-\pi/2$, 0, $\pi/2$, π an?

(1 Punkte)

Aufgabe 4: a) Berechnen Sie die Fouriertransformation $\hat{f}(p)$ der Funktion

$$f(x) = \theta(x)\, e^{-x}, \qquad \text{wobei} \qquad \theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{wenn} \quad x < 0 \end{cases}$$

die übliche Stufenfunktion sein soll.

(3 Punkte)

b) Für welche komplexen Werte von p exisitiert die Fouriertransformation?

(1 Punkt)

c) Es sei nun

$$\hat{g}(p) = (\hat{f}(p))^2 .$$

Wie sieht die inverse Fouriertransformation $g(x) = FT^{-1}(\hat{g})(x)$ aus? **Hinweis:** Berechnen Sie $g(x)$ mit Hilfe des Faltungsintegrals und unterscheiden Sie zwischen $x < 0$ und $x \geq 0$.

(2 Punkte)

Viel Glück!