Mathematische Methoden: Funktionalanalysis WS10/11
2. Kurztest
10. November 2010

Im 3-dimesnionalen Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2,
$\mathbb{X} = \{p(x) \,|\, p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$, sei ein Skalarprodukt durch

$$(f, g) := \int_0^1 dx\, x f(x)\, g(x)$$

definiert. $\varphi_1 = \sqrt{2}$ und $\varphi_2 = 6x - 4$ sind 2 orthonormale Vektoren bezüglich dieses Skalarproduktes.

a) Finden Sie eine dritten Vektoer η_3, sodass $\{\varphi_1; \varphi_2, \eta_3\}$ eine **Orthogonalbasis** von $\mathbb{X}$ bilden.

b) Wie lauten die Komponenten von $f(x) = \sqrt{2}\, x$ bezüglich dieser Basis.

c) Berechnen Sie den Abstand von $f(x) = \sqrt{2}\, x$ und $g(x) = 1/\sqrt{2}$, wenn die Metrik $d(f, g)$ die, durch das obige Skalarprodukt induzierte ist.

$\mathbb{X} = \{p(x) | p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

a) $\varphi_1 = \sqrt{2}$, $\varphi_2 = 6x - 4$

$\eta_u = \tilde{\varphi}_u - \sum_{i=1}^{u-1} (\varphi_i, \tilde{\varphi}_u)\varphi_i$

$\eta_3 = \tilde{\varphi}_3 - (\varphi_2, \tilde{\varphi}_3)\varphi_3$

$= ?$

b) $f(x) = \sqrt{2}x$ $\quad (f, g) = \int_0^1 dx\, x\, f(x)\, g(x)$

$(f(x), \varphi_1) = \int_0^1 dx\, x \cdot \sqrt{2}x \cdot \sqrt{2}$

$= \int_0^1 dx\, x \cdot 2 \cdot x$

$= 2\int_0^1 dx\, x^2 = 2\int_0^1 dx \frac{x^3}{3} = 2 \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3}$

3

$(f(x), \varphi_2) = \int_0^1 dx\, x \sqrt{2} x\, (6x - 4)$

$= \sqrt{2}\int_0^1 dx\, 6x^3 - 4x^2 = \sqrt{2}\int_0 dx\, 6x^3 - 4x^2 = \sqrt{2}\left.\left(\frac{6}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3\right)\right|_0^1 =$

$= \sqrt{2}\left(\frac{6}{4} - \frac{4}{3}\right) = \sqrt{2}/6$