KFU Graz — M. Blatnik, A. Hörl, W. Schweiger
TU Graz — J. Neumayer, M. Rumetshofer

Funktionalanalysis und partielle Differenzialgleichungen WS 15/16

1. Übungstest, 18. November 2015

Aufgabe 1: Auf dem Intervall $[0,1]$ sei die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \begin{cases} n & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $f_n(x)$ auf dem Intervall $(0,1]$ **punktweise** gegen $f(x) = 0$ konvergiert. **(2 Punkte)**

b) Liegt punktweise Konvergenz gegen $f(x)$ auch bei $x = 0$ vor? Begründen Sie ihre Antwort. **(1 Punkt)**

c) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge f_n aber nicht in der L^2-Norm ($||f||_{L^2} = (\int_0^1 dx\,|f(x)|^2)^{1/2}$) gegen f konvergiert.

(2 Punkte)

Aufgabe 2: Laguerre-Polynome $L_n(x)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, lassen sich mit Hilfe der Rekursionsrelation

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)\,L_n(x) - nL_{n-1}(x) \quad \text{mit} \quad L_0(x) = 1 \quad \text{und} \quad L_1(x) = 1-x$$

gewinnen. Sie erfüllen die Orthonormalitätsrelation

$$\int_0^\infty dx\, e^{-x}\, L_n(x)\, L_m(x) = \delta_{nm}\,.$$

a) Berechnen Sie $L_2(x)$ und $L_3(x)$. **(1 Punkt)**

b) Drücken Sie $f(x) = x^2$ durch Laguerre-Polynome aus.

(2 Punkte)

c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\infty dx\, e^{-x}\, x^2\, L_n(x)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

(2 Punkte)

Hinweis: Überlegen Sie sich, wo man die Orthogonalitätsrelation der Laguerre-Polynome sinnvoll verwenden kann.

Aufgabe 3: Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \cos(x)$$

auf dem Intervall $[0, \pi/2]$.

a) Setzen Sie die Funktion symmetrisch auf das Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ fort und berechnen Sie die Fouriereihe $FR(f)(x)$ der dadurch entstandenen geraden Funktion (Periode π).

(3 Punkte)

b) Skizzieren Sie die Funktion, die durch $FR(f)(x)$ beschrieben wird, im Bereich $[-3\pi/2, 3\pi/2]$.

(1 Punkt)

c) Gegen welche Funktion g(x) – gefragt ist die analytische Form dieser Funktion – konvergiert die Ableitung der Fourier-Cosinusreihe $\frac{d}{dx}FR(f)(x)$ auf dem Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$? Skizzieren Sie $\frac{d}{dx}FR(f)(x)$ im Bereich $[-3\pi/2, 3\pi/2]$. Welchen Wert hat $dFR(f)(x)/dx$ an den Stellen $x = \pm\pi/2$? **(2 Punkte)**

Hinweis: Benutzen Sie

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

und überlegen Sie sich, welche Werte

$$\sin((1 \pm 2n)\frac{\pi}{2})$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots$ annimmt.

Aufgabe 4: Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(x) - 6y'(x) + 13y(x) = 0\,, \quad y(0) = 0\,,\, y'(0) = -3$$

mittels Laplace-Transformation.

(4 Punkte)

Hinweis: Benutzen Sie, dass für

$$g(x) = e^{-ax}\sin(bx) \quad \text{die Laplace-Transformierte} \quad L(g)(p) = \frac{b}{(p+a)^2 + b^2}$$

ist.

Viel Glück!