Name:

Matrikelnummer:

1. Berechnen Sie - mit Hilfe der Laplace-Transformation - die Lösung $\{x(t), y(t)\}$ des folgenden Anfangswertproblems:

$$\begin{aligned} \dot{x} + \dot{y} &= -x + y, & x(0) &= 1, \quad y(0) = 1. \\ \dot{x} - \dot{y} &= 2e^{-t} \end{aligned}$$

[5 Punkte]

2. Gegeben sei die stückweise konstante Funktion $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -a \\ 1 & \text{für } -a < x \leq a \\ 0 & \text{für } x > a \end{cases} \quad \text{mit } a > 0.$$

- a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $F(\lambda)$ von $f(x)$.
- b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\tilde{F}(\lambda)$ von $\tilde{f}(x) = f(b(x - c))$ mit $b > 0$. Hinweis: Sie können den Ähnlichkeitssatz und den Verschiebungssatz für Fouriertransformationen verwenden.

[4 Punkte]

3. Berechnen Sie die allgemeine Lösung $z(x, y)$ der folgenden Differentialgleichung erster Ordnung:

$$2xy z_x + y z_y = z + y + xy^2.$$

[6 Punkte]