KFU Graz
TU Graz

M. Blatnik, A. Hörl, W. Schweiger
J. Neumayer, M. Rumetshofer

Funktionalanalysis und partielle Differenzialgleichungen
WS 15/16

2. Übungstest, 2. Februar 2016

Aufgabe 1: Das Potential eines elektrischen Dipols sei

$$V(\vec{r}) = q\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{r}+\vec{a}|}\right) \qquad \text{mit} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a/2 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass es sich durch Übergang zu Kugelkoordinaten in der Form
$$V(\vec{r}) = \frac{q}{r}\left(\Phi(\cos\theta, \frac{a}{2r}) - \Phi(\cos\theta, -\frac{a}{2r})\right)$$
schreiben läßt, wobei
$$\Phi(x,h) = (1-2xh+h^2)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} h^l\, P_l(x)$$
die erzeugende Funktion für Legendre-Polynome ist.
Hinweis: Drücken Sie $|\vec{r} \pm \vec{a}\,|$ durch $r = |\vec{r}|$, $a = |\vec{a}|$ und $\cos(\theta)$ aus.
(3 Punkte)

b) Mit Hilfe der in a) angeführten Zusammenhänge gelangen Sie zu der Multipolentwicklung
$$V(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} V_l(r) P_l(\cos(\theta))$$
des elektrostatischen Dipolpotentials. Wie sieht $V_l(r, r')$ aus?
(2 Punkte)

Aufgabe 2: $F(t) = \theta(t)\cos(t)$ mit der Stufenfunktion $\theta(t)$ sei der Kern einer regulären Distribution F. Wie sieht der Kern der Ableitung dieser Distribution (d.h. $F'(t)$) aus?
Hinweis: Erinnern Sie sich, dass die Ableitung einer Distribution durch
$$\langle F', \phi\rangle = -\langle F, \phi'\rangle$$
gegeben ist, wobei ϕ eine Testfunktion aus C_0^∞ sein soll.
(5 Punkte)

Aufgabe 3: Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta,\varphi)$ sind simultane Eigenfunktionen des Quadrats des Drehimpulsoperators
$$L^2 = -\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$
zum Eigenwert $l(l+1)$ (d.h. $L^2 Y_l^m = l(l+1)Y_l^m$) und der z-Komponente des Drehimpulsoperators
$$L_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}$$
zum Eigenwert m (d.h. $L_z Y_l^m = mY_l^m$). Gegeben sei nun die Kugelflächenfunktion
$$f(\theta,\varphi) = Ce^{i\varphi}\cos(\theta)\sin(\theta)\,,$$
wobei C eine geeignete Normierungskonstante ist.

a) Zeigen Sie, dass $f(\theta,\varphi)$ eine Eigenfunktion von L_z ist. Was ist der zugehörige Eigenwert m? **(1 Punkt)**

b) Zeigen Sie, dass $f(\theta,\varphi)$ eine Eigenfunktion von L^2 ist. Was ist der Eigenwert $l(l+1)$ bzw. was ist dann l? **(3 Punkte)**

Aufgabe 4: Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung (also eine partielle DGL)
$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}\, t > 0$$
mit der Anfangsbedingung
$$u(t=0,x) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

a) Wie lautet die gewöhnliche Differentialgleichung (in der Zeit t) für die Fourier-Transformierte $U(t,p)$ von $u(x,t)$ (d.h. FT bzgl. x)?
(1 Punkte)

b) Lösen Sie die Differentialgleichung für $U(t,p)$ unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung (die auch Fourier-transformiert werden muss).
(2 Punkte)

c) Finden Sie die Lösung $u(t,x)$ des ursprünglichen Problems durch inverse Fouriertransformation unter Anwendung des Faltungsintegrals. Benutzen Sie dabei, dass
$$FT^{-1}(e^{-ap^2})(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-x^2/(4a^2)}\,.$$
(3 Punkte)

Viel Glück!