

1. Teil

In diesem Teil werden nur die Lösungen bewertet. Jede Frage kann mit wahr (w) oder falsch (f) beantwortet werden. Es werden nur diese Symbole (w) und (f) als gültige Antworten in der Tabelle unten gewertet. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen halben Punkt, für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen. Die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe liegt immer zwischen 0 und 2 Punkten.

(2 Punkte)

Aufgabe 1:

Im Folgenden sei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Welche der folgenden Aussagen sind wahr (w) oder falsch (f)?

Aussage:	(w) oder (f)
Ist $\operatorname{div} F = 0$, dann ist F konservativ	
Das Arbeitsintegral $\int_c \langle F, t \rangle ds$ verschwindet entlang jeder geschlossenen C^1 -Kurve c	
Ist $\operatorname{rot} F = 0$, dann existiert eine Potentialfunktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $F = \nabla \Phi$ gilt.	
Das Arbeitsintegral $\int_c \langle F, t \rangle ds$ hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve c ab.	

Bitte wenden!

2. Teil

Die Aufgaben in diesem Teil sind auf separaten Blättern zu bearbeiten. Es werden der gesamte Lösungsweg und das Ergebnis bewertet.

Aufgabe 2:

(3 Punkte)

Bestimmen Sie alle lokalen Minima und Maxima der Funktion $f(x, y) := x^4 + y^4 - 2x^2 + 2y^2$. Geben Sie den Typ dieser Extremstellen, falls sie existieren, an.

Für die Charakterisierung der kritischen Punkte dürfen Sie folgendes Kriterium anwenden: Sei

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

eine symmetrische 2×2 Matrix. Dann ist M genau dann

- (i) positiv definit, wenn $\det(M) > 0$ und $a > 0$ ist.
- (ii) negativ definit, wenn $\det(M) > 0$ und $a < 0$ ist.
- (iii) indefinit, wenn $\det(M) < 0$ ist.

Im Fall $\det(M) = 0$ kann keine Aussage getroffen werden.

Aufgabe 3:

(3 Punkte)

Es sei $B \subset \mathbb{R}^2$ jener Bereich, der von den Kurven $y = x^2$ und $y = 2 - x^2$ eingeschlossen ist. Berechnen Sie das Integral

$$\int_B 12y \, d(x, y).$$

Aufgabe 4:

(5 Punkte)

Berechnen Sie das Arbeitsintegral

$$\int_c \langle F, t \rangle ds$$

für die Funktion

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \tan(x^4) + z^2 \\ xz^2 - e^{\cos(y)} \\ \ln(1 + z^2) \end{pmatrix}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

wobei c die Randkurve des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ bei $z = 4$ ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 5:

Wir betrachten die Funktion

$$f(z) := \frac{\cos(z)}{z^3}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

- (a) Berechnen Sie das Residuum von f an der Stelle $z_0 = 0$.
- (b) Berechnen Sie das komplexe Kurvenintegral

$$\int_{|z|=1} f(z) dz.$$