Vektoranalysis

Dr. Markus Holzmann

Schriftliche Prüfung

7. Mai 2021

Name: ______________________ Matr.-Nr.: ______________

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**. Bitte beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen! Es können maximal 16 Punkte erreicht werden. Die Prüfung gilt mit 8 Punkten als bestanden.

Bitte dieses Feld NICHT ausfüllen:

1	2	3	4	5	$\sum$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: (3 Punkte)
Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 2. Ordnung der Funktion $f(x,y) = \cos(x^2+y) + xy$ um den Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, \pi)^\top$.

Aufgabe 2: (2 Punkte)
Gegeben sei die Kurve

$$c : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad c(t) := \begin{pmatrix} 2\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie die Kurve c. Zeichnen Sie auch die Durchlaufrichtung der Kurve ein.

(b) Bestimmen Sie an jedem Punkt der Kurve den normierten Tangentialvektor.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Es sei S jener Teil der Fläche $z = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2$, der zwischen den Ebenen $z = 1$ und $z = 4$ liegt.

(a) Geben Sie eine Parametrisierung für S an und berechnen Sie an jedem Punkt von S einen Normalenvektor.

(b) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y+z \\ x \\ x+2y+z \end{pmatrix}$$

durch S.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Es sei $A \subset \mathbb{R}^2$ der Teilbereich aller $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y \geq 0$, der durch die Kurven $x^2+y^2 = 1$ und $y = 0$ begrenzt ist. Weiters sei c die Randkurve von A, t der Tangentialvektor von c, der A im mathematisch positiven Sinn umläuft, und

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \ln(1+x^2) + y \\ \arctan(1-y^3) + x^2 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten das Integral

$$\int_c \langle F, t \rangle ds. \tag{1}$$

(a) Um welchen Typ von Integral handelt es sich bei (1)? Geben Sie die (allgemeine) Definition des Integrals an und erklären Sie alle darin vorkommenden Terme.

(b) Berechnen Sie den Wert des Integrals (1).

Aufgabe 5: (3 Punkte)
Betrachten Sie die Funktion

$$f(z) := \frac{e^{(z^2)} - z}{z^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

(a) Berechnen Sie die Ordnung der Polstelle von f bei $z_0 = 0$.

(b) Berechnen Sie das Residuum $\operatorname{Res}(f, z_0 = 0)$.