Vektoranalysis Prüfung

H. Gausterer

11. Oktober 2021

Name: ____

Matrikelnummer: ____

Beachten Sie:
Sollten Sie etwas definieren, beweisen, begründen, usw., dann bitte in einer präzisen mathematischen Sprache, sodass Missverständnisse vermieden werden.

Helmut Gausterer

1. Definieren Sie den Begriff des reellen Vektorraums.

2. Was verstehen Sie unter der Basis eines n-dimensionalen reellen Vektorraums?

3. Definieren Sie den Begriff Bilinearform auf einem reellen n-dimensionalen Vektorraum. Definieren Sie den Begriff Sesquilinearform auf einem komplexen n-dimensionalen reellen Vektorraum.

4. V sei ein reeller n-dimensionaler Vektorraum mit ONB $\{\vec{e_j}\}$. V^* ist der Dualraum zu V. $\vec{F} \in V^*$, $\vec{f} \in V$. Welche Möglichkeiten (mindestens 2) haben Sie $\vec{F}(\vec{f})$ zu definieren?

5. Seien V, W reelle Vektorräume. V sei n-dimensional, W sei m-dimensional. $\{\vec{u}_j\}$ mit $j = 1, 2, .., n$ sei die ONB in V und $\{\vec{v}_k\}$ mit $k = 1, 2, .., m$ sei die ONB in W. Wie sieht die ONB von $V \otimes W$ aus? Für $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$ mit $v \in V$ und $w \in W$, wie sieht das Kronecker-Produkt $v \circ w$ aus?

6. $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ Wie sieht die totale Ableitung von $\vec{f}$ $\forall \vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$ aus? Begründen Sie das.

7. $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f : D \to \mathbb{R}$. Wann gilt $\forall \vec{x} \in D$ immer
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\right) f = 0,\ 1 \leq i, j \leq n?$$

8. $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f : D \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Definieren Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle $\vec{x_0} \in D$ in Richtung $\vec{v}$.

9. $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f \in C^1(D, \mathbb{R})$, $\vec{x} \in C^1((a, b), D)$, $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie
$$\frac{d}{dt} f(\vec{x}(t)) = \vec{\nabla} f(\vec{x}(t)) \frac{d}{dt}\vec{x}(t)$$
(Zeigen Sie, dass die Kettenregel gilt)

10. $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Sei ∂D der Rand von D. Was verstehen wir unter der stetigen Fortsetzung von f auf ∂D?

11. $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ $\vec{f} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}$ $\gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$. γ sei positiv parametrisiert.

    Zeigen Sie, dass

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\{x^2+y^2 \leq 1, z=0\}} \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \right) dA$$

    $\vec{n}$ sei der nach außen gerichtete Normalvektor von γ.

12. $D \subset \mathbb{R}^3$ offen. $\vec{u} : D \to \mathbb{R}^3$ bijektiv und in beide Richtungen C^∞. Weiters sei $\vec{u}$ ein lokales orthogonales Koordinatensystem (krummlinige Koordinaten). $\phi : D \to \mathbb{R}$. Berechnen Sie $\nabla\phi$ in den lokalen Koordinaten.

13. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ Typ 4. $(0,0,0) \notin \Omega$. Zeigen Sie

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{||\vec{x}||} dA = 0$$

    $\vec{n}$ sei der nach außen gerichtete Normalvektor von $\partial\Omega$.

14. ω sei eine 1-Form auf dem $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass die äußere Ableitung von ω, $d\omega$ einem Rotor im $\mathbb{R}^3$ entspricht (Isomorphie). Zeigen sie, dass $d(d\omega) = 0$. $\vec{\gamma} \in C^1((a,b), \mathbb{R}^3)$ mit $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Was bedeutet der formale Ausdruck $\int_\gamma \omega$ im $\mathbb{R}^3$?

15. ω sei eine 2-Form auf dem $\mathbb{R}^3$. F sei eine orientierbare parametrisierte Fläche. Was bedeutet der formale Ausdruck $\int_F \omega$ im $\mathbb{R}^3$?

Hinweis: Für die Fragen 14 und 15 geben Sie die explizite Form an.