Vektoranalysis Prüfung

H. Gausterer

6. Juli 2021

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Beachten Sie:
Sollten Sie etwas definieren, beweisen, begründen, usw., dann bitte in einer präzisen mathematischen Sprache, sodass Missverständnisse vermieden werden.

Helmut Gausterer

Hinweis: Für die Fragen 1 bis 5 gelten folgende Voraussetzungen. V sei ein n-dimensionaler reeller Vektorraum versehen mit einem Skalarprodukt. $\{\vec{e}_j\}$ sei eine ONB auf V.

1. V^* sei der Dualraum von V. Definieren Sie den Begriff Dualraum. Welche Eigenschaften besitzt der Dualraum.

2. $\vec{F} \in V^*$ und $\vec{f} \in V$. Definieren Sie die Abbildung $\vec{F}(\vec{f})$ mit Hilfe des Lemmas von Riesz. Definieren Sie diese Abbildung mit Hilfe der Basis und der dualen Basis.

3. $V^* \otimes V^*$ sei das Tensorprodukt von V^*. Definieren Sie den Begriff Tensorprodukt des Dualraums.

4. $T \in V^* \otimes V^*$. Definieren Sie diesen Tensor mit Hilfe der dualen Basis. Für $\vec{f}, \vec{g} \in V$ definieren Sie mit Hilfe der Basis und der dualen Basis die Abbildung $T(\vec{f}, \vec{g})$.

5. ω sei eine 2-Form auf V. ω ist eine Tensor welcher Stufe und begründen Sie das.

6. $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. $\vec{f}$ sei total differenzierbar an $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$. Definieren Sie den Begriff total differenzierbar.

7. $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. $\vec{f}$ sei partiell nach x_k differenzierbar an

$$(a_1, a_2, ..., \tilde{x}_k, a_{k+1}, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$$

Also

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \vec{f}(a_1, a_2, ..., x_k, a_{k+1}, ..., a_n) \Big|_{x_k = \tilde{x}_k} \in \mathbb{R}^m$$

Wie ist dieser Begriff definiert.

8. $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Wie sieht die totale Ableitung an der Stelle $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$ aus.

9. $D \subset \mathbb{R}^n \quad f \in C^1(D, \mathbb{R}) \quad c \in \mathbb{R}$
$f(\vec{x}) = c$ definiere eine Hyperfläche $\mathscr{H}$. $\vec{x} : (a, b) \to D$ ein Weg. $f(\vec{x}(t)) = c$ ist dann ein Weg auf $\mathscr{H}$. Welcher Vektor $\vec{v}(t) \perp \dot{\vec{x}}(t)\ \forall t \in (a, b)$.

10. Definieren Sie den Tangentialraum $T_{\vec{x_0}}\mathscr{H}$ an $\vec{x}_0 \in \mathscr{H}$. Welche Eigenschaften besitzt $T_{\vec{x_0}}\mathscr{H}$.

11. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ und $f \in C^0(D, \mathbb{R})$. Welche Eigenschaft(en) muss f besitzen, sodass $\int_{\partial D} f\ ds$ definierbar ist und existiert.

12. $F \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte parametrisierte Fläche. $V \in C^0(F, \mathbb{R}^3)$. Was bedeutet der Ausdruck $\int_F \vec{V} \cdot d\vec{A}$. Definieren Sie alle notwendigen Begriffe. Wie ist dieser Ausdruck zu verstehen falls $F = \cup F_i \quad i \in I$ $F_i \cap F_j \in \mathscr{N}$ für $i \neq j \quad \forall i, j \in I$. $\quad F_i\ \forall i \in I$ glatte parametrisierte Flächen. $\vec{V} \in C^0(F_i, \mathbb{R}^3)\ \forall i \in I$.

    ($\mathscr{N}$: Riemann Nullmengen).

13. $\vec{V} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. $\vec{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ beliebige einfach geschlossene Wege.
    Zeigen Sie
    $$\int_{\vec{\gamma}} \vec{V} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$$
    und
    $$\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0 \Rightarrow \int_{\vec{\gamma}} \vec{V} \cdot d\vec{s} = 0$$

14. Nutzen Sie den Satz von Green um den Satz von Gauß für die Ebene herzuleiten.

15. $\int_{\partial \mathscr{M}} \omega = \int_{\mathscr{M}} d\omega$ sei der Satz von Gauß im $\mathbb{R}^3$. Was folgt daraus für $\mathscr{M}$ und ω.