Vektoranalysis

Dr. Markus Holzmann

Schriftliche Prüfung

25. September 2020

Name: ______________________________ Matr.-Nr.: ____________________

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**. Bitte beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen! Es können maximal 16 Punkte erreicht werden. Die Prüfung gilt mit 8 Punkten als bestanden.

Bitte dieses Feld NICHT ausfüllen:

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: (3 Punkte)
Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 2. Ordnung der Funktion $f(x, y) = \sin(x + y) + xy^2$ um den Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (\pi, 0)^\top$.

Aufgabe 2: (2 Punkte)
Gegeben sei die Kurve

$$c : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, \quad c(t) := \begin{pmatrix} 3\sin t \\ -3\cos t \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie die Kurve c. Zeichnen Sie auch die Durchlaufrichtung der Kurve ein.

(b) Berechnen Sie die Länge von c.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Drücken Sie das Vektorfeld

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{x^2 + y^2})x \\ \cos(\sqrt{x^2 + y^2})y \end{pmatrix}$$

in Polarkoordinaten aus, d.h. bestimmen Sie die Koeffizienten der Einheitsvektoren e_r, e_φ bzgl. der Polarkoordinaten in Abhängigkeit der entsprechenden Variablen r, φ. Bestimmen Sie weiters die Divergenz von F in Polarkoordinaten.
Hinweis: Für $F = F_r e_r + F_\varphi e_\varphi$ gilt $\operatorname{div} F = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}F_\varphi$.

Aufgabe 4: (2 Punkte)
Es sei S die durch $y = x^2 + \ln z$ für $-1 \leq x \leq 1$ und $1 \leq z \leq 2$ gegebene Fläche. Geben Sie eine Parametrisierung dieser Fläche an und bestimmen Sie in jedem Punkt einen Normalenvektor.

Aufgabe 5: (3 Punkte)
Es sei $V \subset \mathbb{R}^3$ der Teilbereich des Zylinders mit Radius 1, dessen Symmetrieachse die z-Achse ist, der im 1. Oktanden liegt (d.h. $x, y, z \geq 0$) und der durch $z \leq 2$ beschränkt ist. Weiters sei S die Oberfläche von V und

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \ln(1 + y^2)\arctan(z) \\ x^2 y \\ y^2 z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Flussintegral

$$\int_S \langle F, n \rangle dA,$$

wobei der Normalenvektor n stets aus der oben beschriebenen Geometrie hinauszeigt.

Aufgabe 6: (2 Punkte)
Formulieren Sie den Satz von Cauchy. Geben Sie alle notwendigen Voraussetzungen an und erklären Sie alle darin auftretenden Terme, insbesondere auch das vorkommende komplexe Integral.

$$\boxed{\text{Vorlesungsprüfung in Vektoranalysis, } 25.9.2020}$$

(1) $f(x,y) = \sin(x+y) + xy^2 \Rightarrow f(x_0,y_0) = f(\pi,0) = 0$ 0,5

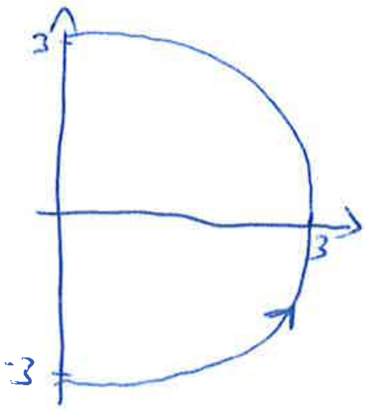
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) + y^2 \\ \cos(x+y) + 2xy \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(\pi,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ 1

$$H f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x+y) & -\sin(x+y) + 2y \\ -\sin(x+y) + 2y & -\sin(x+y) + 2x \end{pmatrix} \Rightarrow H f(\pi,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\pi \end{pmatrix}$$ 0,5

$$\Rightarrow \boxed{P_2(x,y) = \pi - x - y + \pi y^2} \quad \left(= f(\pi,0) + \nabla f(\pi,0) \cdot \begin{pmatrix} x-\pi \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-\pi, y) \cdot H f(\pi,0) \cdot \begin{pmatrix} x-\pi \\ y \end{pmatrix} \right)$$

0,5 0,5

(2) $c : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = \begin{pmatrix} 3\sin t \\ -3\cos t \end{pmatrix}$ a)



b) $\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 3\sin t \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow |\dot{c}(t)| = \sqrt{9\cos^2 t + 9\sin^2 t} = 3\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 3$$

$$\Rightarrow L(c) = \int_0^\pi |\dot{c}(t)|\,dt = \int_0^\pi 3\,dt = \underline{\underline{3\pi}}$$

(3) $F(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{x^2+y^2}\; x \\ \cos\sqrt{x^2+y^2}\; y \end{pmatrix}$

Polarkoordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$ 1 , $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$

$$\Rightarrow e_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$ 1

$$\Rightarrow F(x,y) = \begin{pmatrix} \cos r \cdot r\cos\varphi \\ \cos r \cdot r\sin\varphi \end{pmatrix} = r \cdot \cos r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \underline{r\cos r\; e_r} + 0 \cdot e_\varphi$$ 1

$$\Rightarrow \operatorname{div} F = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot r\cos r)\right) + 0 = \frac{1}{r}\left(2r\cos r - r^2 \sin r\right)$$

$$= \underline{\underline{2\cos r - r\sin r}}$$ 1

(4) $y = x^2 + \ln z, \quad -1 \le x \le 1, \quad 1 \le z \le 2$

$\Rightarrow$ Parametrisierung : $p(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ u^2 + \ln v \\ v \end{pmatrix}$ 1 , $-1 \le u \le 1, \; 1 \le v \le 2$

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial p}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{v} \\ 1 \end{pmatrix} \; 0{,}5 \quad \Rightarrow n(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1/v \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2u \\ -1 \\ 1/v \end{pmatrix}} \; 0{,}5$$

(5) Beschreibung von V in Zylinderkoordinaten:

$0 \le r \le 1, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le z \le 2$. 1P.

$$\int_S \langle F, n \rangle \, dA \overset{\text{Gauß}}{\underset{0{,}5}{=}} \int_V \operatorname{div} F \, dx \overset{0{,}5}{=} \int_V (x^2 + y^2) \, dx = \int_{r=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{z=0}^{2} r^2 \cdot r \, dz \, d\varphi \, dr \; 0{,}5$$

$$= \pi \int_0^1 r^3 \, dr = \pi \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}} \; 0{,}5$$

(6) Sei $G \subset \mathbb{C}$ und f eine auf ganz G holomorphe 0,5 (d.h. komplex differenzierbare Funktion). Sei c die Kurve, die G umrandet. Dann gilt

$$\int_c f(z) \, dz = 0 \qquad 1$$

Dabei ist das komplexe Kurvenintegral durch

$$\int_c f(z) \, dz = \int_a^b f(c(t)) \cdot c'(t) \, dt \qquad 0{,}5$$

gegeben.