Vektoranalysis

Dr. Markus Holzmann

Schriftliche Prüfung

11. November 2020

Name: ______________________________ Matr.-Nr.: ________________

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**. Bitte beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen! Es können maximal 16 Punkte erreicht werden. Die Prüfung gilt mit 8 Punkten als bestanden.

Bitte dieses Feld NICHT ausfüllen:

1	2	3	4	5	$\sum$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Untersuchen Sie, ob es sich bei dem Vektorfeld

$$F(x,y,z) := \begin{pmatrix} y + yze^{xyz} \\ x + xze^{xyz} \\ xye^{xyz} \end{pmatrix}$$

um ein Gradientenfeld handelt (das zugehörige Potential müsste nicht berechnet werden).

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Es sei c die Schnittkurve im $\mathbb{R}^3$ des Drehellipsoids $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 13$ und der Ebene $z = 1$. Geben Sie eine Parametrisierung von c an und berechnen Sie an jedem Punkt der Kurve einen Tangentialvektor.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Es sei S jener Teil des Paraboloids $z = x^2 + y^2$, welcher unterhalb der Ebene $z = 1$ liegt.

(a) Geben Sie eine Parametrisierung für S an und berechnen Sie an jedem Punkt von S einen Normalenvektor.

(b) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt von S.

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Formulieren Sie den Integralsatz von Stokes und erklären Sie alle darin auftretenden Terme.

Aufgabe 5: (3 Punkte)

Es sei

$$f(z) = \frac{e^{(z^3)} - 1}{z^4}.$$

Bestimmen Sie den Typ der Singularität bei $z = 0$ und berechnen Sie das Residuum von f an $z = 0$.

Vektoranalysis – Vorlesungsprüfung

11.11.2020

(1) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y + yz\,e^{xyz} \\ x + xz\,e^{xyz} \\ xy\,e^{xyz} \end{pmatrix}$ ist überall definiert und für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Es reicht $\operatorname{rot} F = 0$ zu prüfen.

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y + yz\,e^{xyz} \\ x + xz\,e^{xyz} \\ xy\,e^{xyz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^{xyz} + x^2yz\,e^{xyz} - xe^{xyz} - x^2yz\,e^{xyz} \\ y\,e^{xyz} + xy^2z\,e^{xyz} - ye^{xyz} - xy^2z\,e^{xyz} \\ 1 + ze^{xyz} + xyz^2\,e^{xyz} - 1 - ze^{xyz} - xyz^2\,e^{xyz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$\Rightarrow F$ ist konservativ ✓

(2) Schnittkurve von $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 13$ und $z = 1$

$$\Rightarrow x^2 + 4y^2 + 9 = 13 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 4 \Rightarrow \underline{c(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix}} \quad t \in [0, 2\pi)$$

Tangentialvektor: $\underline{\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}}$

(3) a) $z = x^2 + y^2$, $z \le 1$

Verwende Zylinderkoordinaten: $z = (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2 \le 1$

$$\Rightarrow p(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi < 2\pi \end{array}$$

Normalenvektor: $n(r,\varphi) = \frac{\partial p}{\partial r} \times \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 2r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2r^2\cos\varphi \\ -2r^2\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}$

$$|n(r,\varphi)| = \sqrt{4r^4\cos^2\varphi + 4r^4\sin^2\varphi + r^2} = r\sqrt{1+4r^2}$$

b) $\text{Fläche} = \int_S dA = \int_{r=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} |n(r,\varphi)|\, d\varphi\, dr = 2\pi \int_{r=0}^{1} r\sqrt{1+4r^2}\, dr$

$u = 1 + 4r^2$

$du = 8r\,dr$ $\quad = \frac{\pi}{4} \int_{r=0}^{1} \sqrt{u}\, du = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_{r=0}^{1} = \frac{\pi}{6} \sqrt{(1+4r^2)^3} \Big|_0^1$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{6}\left(\sqrt{125} - 1\right)}}$$

(4) Sei $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar und S eine orientierbare Fläche (Normale schaut immer in stetiger Weise in eine Richtung) mit Randkurve c, die so orientiert ist, dass $\dot{c}$, die in S hineinzeigende Richtung und der Normalenvektor n die rechte-Hand-Regel erfüllen.

Dann gilt

$$\underbrace{\int_S \langle \operatorname{rot} F, n \rangle \, dA}_{\text{Flussintegral durch } S} = \underbrace{\int_C \langle F, t \rangle \, ds}_{\text{Arbeitsintegral entlang von } C}$$

$\operatorname{rot} F = \nabla \times F$

(5) $$f(z) = \frac{e^{(z^3)} - 1}{z^4} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^3)^n}{n!} - 1}{z^4} = \frac{1 + z^3 + \frac{z^6}{2} + \ldots - 1}{z^4}$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{z^2}{2} + O(z^2)$$

$\to$ es handelt sich um eine Singularität 1. Ordnung

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} z \cdot f(z) = \lim_{z \to 0} \left(1 + \frac{z^3}{2} + O(z^3)\right) = \underline{\underline{1}}$$