Vektoranalysis

Dr. Markus Holzmann **Schriftliche Prüfung** **29. Juni 2020**

Name: ______________________________ Matr.-Nr.: ____________________

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**. Bitte beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen! Es können maximal 16 Punkte erreicht werden. Die Prüfung gilt mit 8 Punkten als bestanden.

Bitte dieses Feld NICHT ausfüllen:

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: (2 Punkte)

Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $f(x,y) = x^2 \sin(x^2+y) - e^{x+\cos y}$. Ist f (total) differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2: (2 Punkte)

Gegeben sei die Kurve

$$c : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad c(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie die Kurve c. Zeichnen Sie auch die Durchlaufrichtung der Kurve ein.

(b) Bestimmen Sie an jedem Punkt der Kurve den normierten Tangentialvektor.

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Geben Sie die Polarkoordinaten (im $\mathbb{R}^2$) als Funktion in den Variablen r, φ mit ihrem Definitionsbereich an. Drücken Sie das Vektorfeld

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 + xy^2 - y \\ x^2y + y^3 + x \end{pmatrix}$$

in Polarkoordinaten aus, d.h. bestimmen Sie die Koeffizienten der Einheitsvektoren e_r, e_φ in Abhängigkeit der entsprechenden Variablen r, φ.

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Skizzieren Sie den Bereich, der von den Kurven $y = x^2$ und $y = 2 - x^4$ eingeschlossen ist, und berechnen Sie seinen Flächeninhalt.

Aufgabe 5: (3 Punkte)

Formulieren Sie den Greenschen Integralsatz und erklären Sie alle darin auftretenden Terme.

Aufgabe 6: (3 Punkte)

Geben Sie die Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen an, erklären Sie alle darin vorkommenden Terme und überprüfen Sie mit deren Hilfe, in welchen Punkten $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Funktion $f(z) := \frac{1}{z \cdot \overline{z}}$ holomorph ist.

Vorlesungsprüfung Vektoranalysis 29.6.2020

(1) $f(x,y) = x^2 \sin(x^2+y) - e^{x+\cos y}$ $\qquad \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$

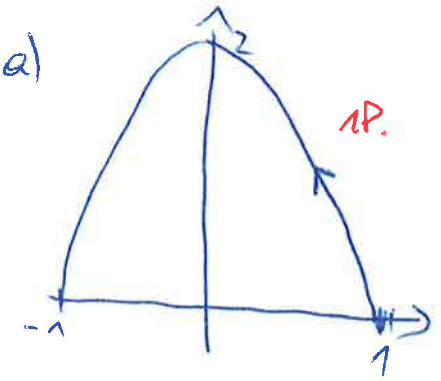
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin(x^2+y) + 2x^3 \cos(x^2+y) - e^{x+\cos y}$ 0,5 P.

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos(x^2+y) + \sin y \cdot e^{x+\cos y}$ 0,5 P.

Die partiellen Ableitungen von f existieren und sind stetig (sie bestehen aus elementaren Funktionen) 0,5 P. Also ist f stetig differenzierbar und insbesondere (total) differenzierbar 0,5 P.

(2) $c : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\quad c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}$

a)



1P.

b) $\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix}$ 0,5 P.

$\Rightarrow |\dot{c}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + 4\cos^2 t} = \sqrt{1 + 3\cos^2 t}$

normierter Tangentialvektor:

$t = \frac{1}{\sqrt{1+3\cos^2 t}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix}$ 0,5 P.

(3) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi_P(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r \sin\varphi \end{pmatrix}$ 0,5P., $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ 0,5P.

$\Rightarrow t_r = \frac{\partial \Phi_P}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow |t_r| = 1$, $\quad e_r = t_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ 0,5P.

$t_\varphi = \frac{\partial \Phi_P}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow |t_\varphi| = r$, $\quad e_\varphi = \frac{t_\varphi}{|t_\varphi|} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$

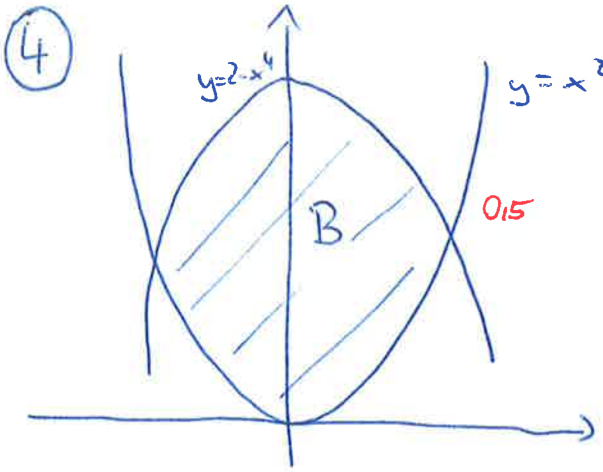
$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 + xy^2 - y \\ x^2 y + y^3 + x \end{pmatrix} = c_r e_r + c_\varphi e_\varphi = \begin{pmatrix} r^3\cos\varphi - r\sin\varphi \\ r^3 \sin\varphi + r\cos\varphi \end{pmatrix}$ 0,5P.

$c_r = \langle F(r\cos\varphi, r\sin\varphi), e_r \rangle = \begin{pmatrix} r^3\cos\varphi - r\sin\varphi \\ r^3\sin\varphi + r\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = r^3$ 0,5P.

$c_\varphi = \langle F, e_\varphi \rangle = \begin{pmatrix} r^3\cos\varphi - r\sin\varphi \\ r^3\sin\varphi + r\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} = r$ 0,5P.

$\Rightarrow \boxed{F = r^3 e_r + r e_\varphi}$

(4)



Berechnung der Schnittpunkte:

$x^2 = 2-x^4 \Leftrightarrow x^4+x^2-2 = (x^2+2)(x^2-1)=0$

$\Rightarrow x^2 = 1$ ($x^2=-2$ hat keine reelle Lösung)

$x = \pm 1$ 0,5

$\Rightarrow B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 2-x^4\}$ 0,5

Fläche von $B = \iint_B 1 \, d(x,y) = \int_{x=-1}^{1} \overset{0,5}{\int_{y=x^2}^{2-x^4}} dy\, dx = \int_{-1}^{1} (2-x^4-x^2)\, dx$ 0,5

$= 2x - \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{1} = \underline{\underline{4 - \frac{2}{5} - \frac{2}{3}}}$ 0,5

(5) Sei $S \subset \mathbb{R}^2$, c die Randkurve von S durchlaufen im mathematisch positiven Sinn 0,5P. (d.h. gegen den Uhrzeigersinn). Dann gilt für stetig differenzierbare 0,5P. Vektorfelder $F = \binom{F_1}{F_2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$\int_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x,y) = \int_c \langle F, t \rangle \, ds \quad 1$$

linke Seite: 2D-Volumsintegral 0,5 P.

rechte Seite: Arbeitsintegral entlang von c 0,5P.

(6) $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ ist in $z = x+iy$ komplex differenzierbar, falls $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ 0,5P. und $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ 0,5P. (also $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$) ~~0,5P.~~ 0,5P.

$f(z) = \frac{1}{z \cdot \bar{z}} = \frac{1}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{1}{x^2+y^2} \Rightarrow u(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = 0$ 0,5P.

$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \neq 0 = \frac{\partial v}{\partial y}$ für $x \neq 0$ 0,5P. $\Rightarrow$ f ist in keinem $z \in \mathbb{C}$ holomorph (es wären nur in $x=y=0$ die CR-DGL erfüllt, hier ist f aber nicht erklärt)

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2} \neq 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}$ für $y \neq 0$

0,5P.