Aufgabe 1: (4 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x,y) = \cos(x)e^{\sin(y)}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix sowie die Hesse-Matrix dieser Funktion.

b) Bilden Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades um den Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Länge der Kurve

$$\mathbf{c}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2(\varphi - \sin(\varphi)\cos(\varphi)) \\ \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) \end{pmatrix}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_B \frac{x}{(x-2)(x-\frac{1}{2})} d(x,y),$$

wobei B die Fläche ist, die von den Kurven $y = \frac{1}{x}$ und $y = \frac{5}{2} - x$ begrenzt wird.

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Sei S die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ (Radius 1 und Mittelpunkt 0) und n der nach außen gerichtete Normalvektor. Bestimmen Sie das Flussintegral

$$\int_S \langle F, n \rangle dA$$

für das Vektorfeld

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x(y^2+z^2) \\ y(z^2+x^2) \\ z(x^2+y^2) \end{pmatrix}.$$