Beispiele für Klausurfragen zur Vorlesung Vektoranalysis (xx.xx.xxxx)

Im folgenden finden Sie eine Liste von Fragen, die bei vergangenen Prüfungsterminen zur Vorlesung Vektoranalysis gestellt wurden (Prof. Lang). In Klammern sind jeweils die maximal erreichbaren Punkte pro Frage angegeben. Für einen konkrete Klausur wurden die Fragen wurden so zusammengestellt, dass in Summe 100 Punkte zu erreichen waren.

Vollständiger Name:
Geburtsdatum:
Matrikelnummer:

Frage 1

Frage 2

Frage 3

Frage 4

Frage 5

Frage 6

Frage 7

Frage 8

Frage 9

Frage 10

Summe der Punkte:

---

1. **(10 P)** Wie berechnen Sie für die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ die Krümmung κ und die Torsion τ?

2. **(10 P)** Für die parametrisierte Bahnkurve $\vec{r}(u)$: wie berechnet man den Tangentialvektor, wie den Hauptnormalenvektor?

3. **(10 P)** Für die parametrisierte Bahnkurve $\vec{r}(u)$: wie berechnet man das Wegelement ds? Hauptnormalenvektor?

4. **(10 P)** Um welche geometrische Struktur (Punkt, Gerade oder Kurve, Fläche, Raumvolumen) handelt es sich bei der Punktemenge im $\mathbb{R}^3$, die jeweils die nachfolgenden Gleichungen erfüllen:
   (a) $x + y + z^2 = 1$
   (b) $x = 1,\ y + z = 2,\ z = 3$
   (c) $x^2 + y^2 + z < 1$
   (d) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$
   (e) $x + y = 5,\ x + z = 1$

5. **(10 P)** Um welche geometrische Struktur (Punkt, Gerade oder Kurve, Fläche, Raumvolumen) handelt es sich bei der Punktemenge im $\mathbb{R}^3$, die jeweils die nachfolgenden Gleichungen erfüllen:
   (a) $x + y = 1$
   (b) $x + z = 1,\ y + z = 2,\ y + z = 3$
   (c) $0.5 < x^2 + y^2 + z^2 < 1$
   (d) $x = 5,\ x + z = 1$

6. **(10 P)** Wie berechnet man für eine Fläche $\vec{r}(u, v)$ das (ungerichtete) differenzielle Flächenelement dA

7. **(5 P)** Wie unterscheiden sich die Flächenelemente dA und $d\vec{A}$?

8. **(5 P)** Wieviele Parameter benötigt man zur Darstellung einer Raumkurve?

9. **(5 P)** Wie lautet der Ortsvektor $\vec{r}(r, \vartheta, \varphi)$ im Kugelkoordinatensystem?

10. **(5 P)** Wie lautet der Ortsvektor ausgedrückt durch Zylinderkoordinaten?

11. **(10 P)** Wie lautet die Parameterdarstellung des Kreises, der den Mittelpunkt bei (0,1,0) hat, den Radius 3, und der parallel zur (x, y)-Ebene liegt?

12. **(10 P)** Wie lautet die Parameterdarstellung einer Ellipse (Hauptachse a und b), die den Mittelpunkt bei (0,2,0) hat und die parallel zur (x, z)-Ebene liegt?

13. **(12 P)** Welche der folgenden Ausdrücke sind mathematisch sinnvoll (dabei ist f eine Funktion und $\vec{A}$ und $\vec{B}$ sind Vektoren oder vektorwertige Funktionen)?
(a) $\vec{\nabla} \times f(x, y, z)$
(b) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$
(c) $\vec{\nabla} f(x, y, z)$
(d) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{B})$
(e) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B})$
(f) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$

14. **(12 P)** Welche der folgenden Ausdrücke sind mathematisch sinnvoll (dabei ist g eine Funktion und $\vec{A}$ und $\vec{B}$ sind Vektoren oder vektorwertige Funktionen), ja oder nein?
(a) $\vec{\nabla} \times g(x, y, z)$
(b) $\vec{\nabla}(\vec{B} \cdot \vec{B})$
(c) $\vec{\nabla} g(x, y, z)$
(d) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + 3\vec{B})$
(e) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B})$
(f) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$

15. **(8 P)** Für die Bahnkurve $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$: wie lautet das Differenzial der Bogenlänge ds?

16. **(8 P)** Nenne ein Beispiel für das Lemma von Poincaré.

17. **(10 P)** Was ergibt (Φ ist eine Funktion, $\vec{F}$ ein Vektorfeld)
(a) $\operatorname{rot}(\Phi\vec{F})$
(b) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\Phi)$

18. **(10 P)** Beschreibe, wie man aus der Angabe von $\vec{r}(s, t, u)$ die normierten Basisvektoren im s, t, u-System bestimmt:

19. **(10 P)** Wie lautet die Definition des Gradienten in einem allgemeinen (also möglicherweise krummlinigen), orthonormalen Basissystem?

20. **(5 P)** Ist $\operatorname{grad} f(x, y, z)$ tangential zur Fläche $f(x, y, z) = 1$?

21. **(5 P)** Berechne $\operatorname{div} \vec{a}$ für $\vec{a} = (x^2, y^2, z^2)$?

22. **(5 P)** Ergänze: $\operatorname{grad} f(|\vec{r}|) = \frac{\partial f}{\partial r} \ldots$

23. **(5 P)** Berechne für $\vec{a} = (x^2, 2y^2, 4z^2)$
    (a)div $\vec{a}$
    (b)rot grad $\vec{a}$

24. **(10 P)** Ein Term der nachfolgenden Gleichung ist falsch. Korrigiere die Gleichung, sodass sie korrekt ist (V bezeichnet ein Volumen):
$$\int_V dV\ \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \int_{\partial V} dA\ \vec{n} \times \vec{F}$$

25. **(10 P)** Korrigiere die Gleichung, sodass sie korrekt ist:
$$\int_V dV\ \vec{\nabla} \times \vec{F} = \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{F}$$

26. **(10 P)** Wie kann man mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes das Integral
$$\int_V dV\ \Delta\Phi$$
in ein Integral über die Oberfläche ∂V umschreiben?

27. **(10 P)** Ergänze die fehlenden Terme im Integralsatz von Green:
$$\int_V dV\ (u\Delta v \ldots ?) = \int_{\partial V} dA\ \vec{n} \cdot (u\vec{\nabla} v \ldots ?)$$

28. **(10 P)** Ergänze den Satz von Stokes:
$$\int_{C=\partial X} d\vec{r} \cdot \vec{G} = ?.$$
Ist dabei X eine Kurve, eine Fläche oder ein Volumensbereich?

29. **(10 P)** Der aus dem Greenschen Satz (in der Ebene) abgeleitete Flächensatz lautet:
$$\iint_B dx_1 dx_2 = ?$$

30. **(10 P)** Sei S die Oberfläche einer Kugel und $\vec{F}$ differenzierbar in der Kugel und auf der Oberfläche. Welchen Wert hat dann das Oberflächenintegral
$$\int_S dA\ \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F})\ ?$$
Begründe das Ergebnis!

31. **(15 P)** Ergänze das Volumenelement $dV \equiv dx\,dy\,dz = \ldots dr\,ds\,dt$ wenn x, y, z als Funktionen der neuen Koordinaten (r, s, t) gegeben sind?

32. **(12 P)** Wir betrachten die (orthogonale) Transformation von Tensoren im $\mathbb{R}^3$. Welche der Aussagen ist richtig, welche falsch:
(a) $s'_{ijk} = r_{iu}r_{jv}s_{uvw}r_{kw}$
(b) $a'_i b'_k = b_s r_{ks} r_{in} a_n$
(c) $a_i b_i = a'_k b'_k$
(d) $a_i b_i c_i = a_k b_k c_i$

33. **(12 P)** Schreibe diese Ausdrücke in Vektorschreibweise (und, wenn möglich, vereinfache sie)
(a) $\epsilon_{ijk} a_i a_j a_k =$ (b) $\delta_{ij}(a_i a_j + c_i d_j) =$ (c) $\epsilon_{ijk}(\delta_{ij} a_k + a_i b_j c_k) =$

34. **(12 P)** Welche der nachfolgend angegebenen Tensoren (oder Tensorfunktionen) sind unter (orthogonalen) Transformationen invariant (a_i, b_i, c_i bezeichnen dabei Tensoren erster Stufe):
(a) $a_i b_i d_k c_k$
(b) $a_i a_k b_i b_k$
(c) $a_i b_k + a_k b_i$
(d) $\det t$ für $t_{ij} = a_i b_j$

35. **(6 P)** Wie kann man $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}$ vereinfachen?

36. **(6 P)** Wie kann man $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk}$ vereinfachen?

37. **(6 P)** Schreibe die Ausdrücke in Tensorschreibweise:
(a) $\vec{a} \times \vec{r}/|\vec{r}|^2 =$
(b) $\vec{\nabla} \times \vec{a} \times \vec{b} =$

38. **(6 P)** Wie kann man $\delta_{ij}\epsilon_{ijk}$ vereinfachen?

39. **(4 P)** Wie kann man $\delta_{ij}\delta_{ji}$ vereinfachen?

40. **(10 P)** Gegeben sei ein Kubus (Kantenlänge a mit der Massendichte $\rho(x, y, z)$. Wie bestimmt man daraus den Trägheitstensor I_{ij} (Formel)?

41. **(10 P)** Der Trägheitstensor I_{ij} sei bekannt. Wir berechnet man das Trägheitsmoment um die Drehachse in Richtung $\vec{a} = (1, -2, 0)$?

42. **(10 P)** Gegeben sei $\vec{r}(u_1, u_2, u_3)$. Wie sind die Basisvektoren der kontravarianten Basis definiert?

43. **(10 P)** Gegeben sei $\vec{r}(u_1, u_2, u_3)$. Wie sind die Basisvektoren der kovarianten Basis definiert?

44. **(10 P)** Wie transformiert man die ko- zu und kontravarianten Komponenten?

45. **(10 P)** Wie berechnet man den metrischen Tensor, wenn $\vec{r}(u_1, u_2, u_3)$ gegeben ist?