Vektoranalysis: Nachtest

H. Gausterer

13. Juli 2021

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Gruppe:

◯ Uni 1 ◯ Uni 2 ◯ TU 1 ◯ TU 2 ◯ TU 3

1. (4 Punkte) $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \quad T$ eine reelle $3x3$ Matrix

$$\vec{x}^T T \vec{x} = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 + 8x_2x_3$$

   Ermitteln Sie die symmetrische 3x3 Matrix, berechnen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren.

2. (4 Punkte) Berechnen Sie die Länge des Weges $\vec{\gamma}$

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \ln(t^3) \\ (2t)^{\frac{3}{2}} \\ t^3 \end{pmatrix} \quad t \in [1, e].$$

3. (4 Punkte) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \, dy \, dx$$

   durch Vertauschen der Integration.

4. (4 Punkte)

$$\varrho \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$$

$$\phi(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varrho(\vec{x}')}{||\vec{x} - \vec{x}'||} d^3x' \quad \forall \vec{x} \neq \vec{x}'$$

   Berechnen Sie $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$. $V \subset \mathbb{R}^3$. V Typ 4 Volumen.
   Zeigen Sie

$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi \int_V \varrho(\vec{x}) dV$$

   Benützen Sie $\Delta\phi = -4\pi\varrho$.

5. (4 Punkte) $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ $\vec{f} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}$

   u, v genügen den Cauchy-Riemann Differenzialgleichungen

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

$$\gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$

   γ sei positiv orientiert parametrisiert. Zeigen Sie mit dem Satz von Green

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot \vec{n} \; ds = 2 \int_{\{x^2+y^2 \leq 1, z=0\}} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} dA$$

   $\vec{n}$ sei der nach außen gerichtete Normalvektor von γ.

6. (4 Punkte)

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} xy \\ \frac{x^2}{2} \\ v(x,y,z) \end{pmatrix}$$

   Was muss $v(x,y,z)$ erfüllen, sodass $\vec{V}$ konservativ ist?

7. (4 Punkte)

$$\vec{V} = (xz, yz, -z)$$

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

   Berechnen Sie

$$\int_{\partial K} \vec{V} \cdot d\vec{A}.$$

   Verwenden sie den Satz von Gauß.

8. (4 Punkte) Gegeben sei eine 1-Form im $\mathbb{R}^3$

$$\omega = ydx - xdy + e^{xz}dz$$

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x^2 + y^2 + z^2 = 2, -1 \leq z \leq 1\}$$

   Berechnen Sie $d\omega$ und $\int_F d\omega$.