Vektoranalysis: 2. Test

H. Gausterer

25. Juni 2021

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Gruppe:

◯ Uni 1 ◯ Uni 2 ◯ TU 1 ◯ TU 2 ◯ TU 3

1. (4 Punkte) $F \subset \mathbb{R}^2$ mit $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ und $P(x,y) = x$, $Q(x,y) = xy$. Zeigen Sie durch explizites Rechnen, dass der Satz von Green gilt.

2. (4 Punkte) Gegeben sei eine Abbildung $\vec{\phi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\vec{\phi}(u,v) = \begin{cases} (u\cos v, u\sin v, u) & \forall u \neq 0 \\ (0,0,0) & u = 0 \ \ \forall v \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

$F \subset \mathbb{R}^3$ sei parametrisiert durch ϕ mit folgenden Werten der Parameter $-r \leq u \leq r \quad r > 0$

$$\begin{cases} \text{für } u > 0: & 0 \leq v \leq \pi \\ \text{für } u < 0: & \pi \leq v \leq 2\pi \\ \text{für } u = 0: & \vec{\phi}(0,v) = (0,0,0) \ \forall v \in [0,2\pi] \end{cases}$$

. Berechnen Sie $A(F)$, die Fläche von F.

3. (4 Punkte) Gegeben sind zwei vektorwertige Funktionen $\vec{E}$ und $\vec{B}$.

$$\vec{E} = \vec{E}(x,y,z,t) \quad \vec{B} = \vec{B}(x,y,z,t)$$

$$\vec{E}, \vec{B} \in C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$$

Weiters sei

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}\,\Big|_{t=t_0} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\Big|_{t=t_0}$$

Zeigen Sie

$$\int_{\partial F} \vec{E} \cdot d\vec{s}\,\Big|_{t=t_0} = -\frac{d}{dt}\int_F \vec{B} \cdot d\vec{A}\,\Big|_{t=t_0}$$

mit F, eine parametrisierte, orientierbare Fläche.

4. (4 Punkte) Ein Weg im $\mathbb{R}^3$ sei parametrisiert durch

$$\vec{x}(t) = (r(t)\sin\vartheta(t)\cos\varphi(t), r(t)\sin\vartheta(t)\sin\varphi(t), r(t)\cos\vartheta(t))$$

Berechnen Sie (Kugelkoordinaten)

$$\frac{d}{dt}\vec{e}_r,\ \frac{d}{dt}\vec{e}_\vartheta,\ \frac{d}{dt}\vec{e}_\varphi$$

und spannen Sie diese auf $\vec{e}_r,\ \vec{e}_\vartheta,\ ,\vec{e}_\varphi$ auf.

5. (4 Punkte) Gegeben sei folgende 1-Form auf dem $\mathbb{R}^3$

$$\omega = (2x + ye^{z^2})\, dx + (2y + xe^{z^2})\, dy + (2xyze^{z^2})\, dz$$

Gegeben sei weiters ein "Zylinder" $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z \geq 0\}$. Dieser Zylinder wird geschnitten mit der Fläche $A:\ x + y + z = 1$. Mit ∂F bezeichnen wir

$$\partial F = Z \cap A.$$

Berechnen Sie

$$\int_{\partial F} \omega.$$