Vektoranalysis UE

Dipl.-Ing. Peter Schlosser

Schriftliche Klausur

07.07.2020

Name: ______________________ Matr.-Nr.: ______________

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**.
Die Klausur besteht aus vier Aufgaben mit insgesamt 16 Punkten.
Die Klausur gilt mit 8 Punkten als bestanden.
Es werden der gesamte Lösungsweg und das Ergebnis bewertet.

Bitte dieses Feld NICHT ausfüllen:

1	2	3	4	$\sum$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x,y) = \cos(x)e^{\sin(y)}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix sowie die Hesse-Matrix dieser Funktion.

b) Bilden Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades um den Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Länge der Kurve

$$\mathbf{c}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\big(\varphi - \sin(\varphi)\cos(\varphi)\big) \\ \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) \end{pmatrix}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_B \frac{x}{(x-2)(x-\frac{1}{2})} d(x,y),$$

wobei B die Fläche ist, die von den Kurven $y = \frac{1}{x}$ und $y = \frac{5}{2} - x$ begrenzt wird.

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Sei S die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ (Radius 1 und Mittelpunkt 0) und n der nach außen gerichtete Normalvektor. Bestimmen Sie das Flussintegral

$$\int_S \langle F, n\rangle dA$$

für das Vektorfeld

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x(y^2+z^2) \\ y(z^2+x^2) \\ z(x^2+y^2) \end{pmatrix}.$$

Übungsklausur 7. Juli

① a) $f(x,y) = \cos(x)\, e^{\sin(y)}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin(x)\, e^{\sin(y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(x)\cos(y)\, e^{\sin(y)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\cos(x)\, e^{\sin(y)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \cos(x)\left(\cos^2(y) - \sin(y)\right) e^{\sin(y)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\sin(x)\cos(y)\, e^{\sin(y)}$$

$$\Rightarrow Df(x,y) = \left(-\sin(x),\ \cos(x)\cos(y)\right) e^{\sin(y)}$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -\cos(x) & -\sin(x)\cos(y) \\ -\sin(x)\cos(y) & \cos(x)\left(\cos^2(y) - \sin(y)\right) \end{pmatrix} e^{\sin(y)}$$

b) $Jf(0,0) = (0,\ 1)$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x,y) \approx f(0,0) + \left\langle \nabla f(0,0), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle Hf(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= 1 + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= 1 + y - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

②

$$c(\varphi) = \begin{pmatrix} 2(\varphi - \sin(\varphi)\cos(\varphi)) \\ \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\varphi - \sin(2\varphi) \\ \cos(2\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\dot c(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\left(1 - \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right) \\ -2\cos(\varphi)\sin(\varphi) - 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\sin^2(\varphi) \\ -4\sin(\varphi)\cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2\cos(2\varphi) \\ -2\sin(2\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\|\dot c(\varphi)\|^2 = 16\sin^4(\varphi) + 16\sin^2(\varphi)\cos^2(\varphi) = 16\sin^2(\varphi) = 8\left(1 - \cos(2\varphi)\right)$$

$$L = \int_0^{2\pi} 4|\sin(\varphi)|\, d\varphi = 8\int_0^{\pi} \sin(\varphi)\, d\varphi = -8\cos(\varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\pi} = 16$$

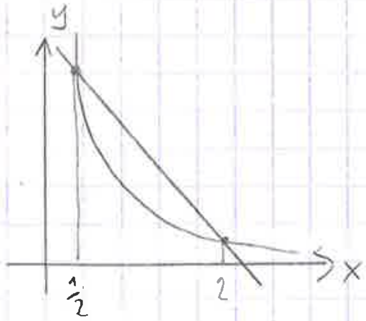
③ Schnittpunkte:

$$\frac{1}{x} = \frac{5}{2} - x$$

$$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2},\quad x_2 = 2$$



Integral:

$$\int_B \frac{x}{(x-2)(x-\frac{1}{2})}\, d(x,y) = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} \frac{x}{(x-2)(x-\frac{1}{2})}\, dy\, dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x}{(x-2)(x-\frac{1}{2})}\left(\frac{5}{2} - x - \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\frac{5}{2}x - x^2 - 1}{x^2 - \frac{5}{2}x + 1}\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} -1\, dx = -\frac{3}{2}$$

(4) $\int_S \langle F, n \rangle \, dA = \int_K \operatorname{div}(F) \, d(x,y,z) =$

$= \int_K (y^2 + z^2 + z^2 + x^2 + x^2 + y^2) \, d(x,y,z) =$

$= 2 \int_K (x^2 + y^2 + z^2) \, d(x,y,z) =$

$= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 r^2 \, r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\theta \, d\varphi =$

$= 8\pi \int_0^1 r^4 \, dr = \frac{8\pi}{5}$