Übungen Vektoranalysis (PHY.E20)
Zwischenklausur – 25.4.2017 – Gruppe A

Name: Matrikelnummer:

Aufgabe 1: Um welche geometrischen Strukturen (Punkt, Kurve, Fläche, Raumvolumen) handelt es sich bei den Punktmengen im $\mathbf{R}^3$, die jeweils die folgenden Gleichungen erfüllen:

a) $x + y = 1,\ z = 0$ *(1 Punkt)*

b) $x + y < 1,\ z = 0$ *(1 Punkt)*

c) $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ *(1 Punkt)*

d) $x = 1, y = 2, z = 3$ *(1 Punkt)*

Aufgabe 2: Beweisen Sie folgende Relatione n

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) \qquad \textit{(2 Punkte)}$$

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \qquad \textit{(4 Punkte)}$$

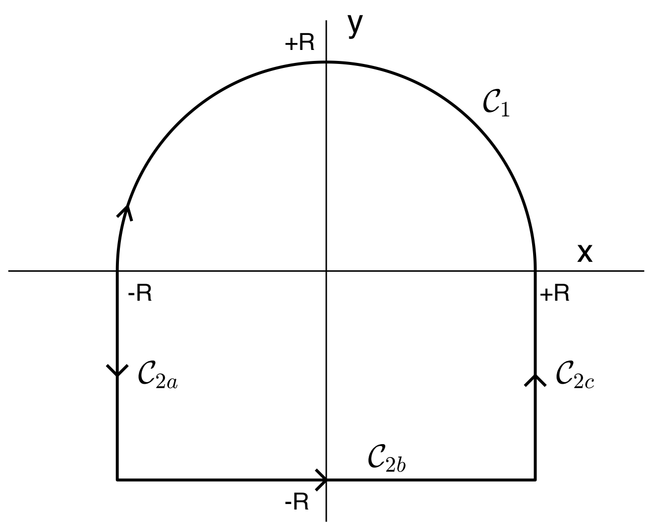
Aufgabe 3: Gegeben sei die Federkraft

$$\vec{F}(x, y, z) = k\big(\vec{r} - \vec{r}_0\big) \ ,$$

wobei $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ein beliebiger fester Vektor ist. Die Arbeit, die aufzuwenden ist, um das Federende entlang eines Weges $\mathcal{C}$ zu bewegen, lautet

$$W = \int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F}\, d\vec{r} \ .$$

Hierbei sollen zwei Wege ausgewertet werden:



$\mathcal{C}_1$: Halbkreis mit Radius R in der x-y-Ebene mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung und Anfangspunkt bei $\vec{r}_a = (-R, 0, 0)$ und Endpunkt bei $\vec{r}_e = (R, 0, 0)$, der im Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

$\mathcal{C}_2$: Besteht aus den drei Geraden $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_{2,a} \cup \mathcal{C}_{2,b} \cup \mathcal{C}_{2,c}$, die die Punkte $\vec{r}_1 = (-R, 0, 0)$, $\vec{r}_2 = (-R, -R, 0)$, $\vec{r}_3 = (R, -R, 0)$, $\vec{r}_4 = (R, 0, 0)$ verbinden.

a) Geben Sie die Parameterdarstellung der Wege $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_{2,\nu}$ (ν=a,b,c) an. (*2 Punkte*)

b) Berechnen Sie die Arbeits- bzw. Wegintegral für den Weg $\mathcal{C}_1$. (*3 Punkte*)

c) Berechnen Sie die Arbeits- bzw. Wegintegral für den Weg $\mathcal{C}_2$. (*3 Punkte*)

d) Man beachte, dass Anfangs- und Endpunkt beider Kurven übereinstimmen. Was fällt an dem Ergebnis auf? Interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch. (*2 Punkte*)

Aufgabe 4: Eine Kugel werde von einer viskosen Flüssigkeit umströmt. In der Flüssigkeit herrscht dann der Druck

$$p(x, y, z) = a + b\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} ,$$

mit konstanten Parametern a und b. Die Kraft, die durch den Druck auf die Kugel ausgeübt wird, ist gegeben durch das Oberflächenintegral

$$\vec{F} = \int\limits_{\partial K(R)} p(x, y, z)\, d\vec{A} ,$$

wobei über die Oberfläche einer Kugel integriert wird, deren Zentrum im Koordinatenursprung liegt und die den Radius R hat.

a) Drücken Sie den Druck $p(\theta, \phi)$ und die Punkte $\vec{r}(\theta, \phi)$ auf der Kugeloberfläche in Kugelkoordinaten aus (*2 Punkte*)

b) Berechnen Sie das infinitesimale Oberflächenelement $d\vec{A} = \frac{\partial}{\partial\theta}\vec{r}(\theta, \phi) \times \frac{\partial}{\partial\phi}\vec{r}(\theta, \phi)\, d\theta d\phi$. (*3 Punkte*)

c) Berechnen Sie den Vektor der Kraft $\vec{F}$ (*5 Punkte*)

Hinweis: $\int_0^\pi \sin(x)\cos(x) = 0$, $\int_0^\pi \sin(x)\cos^2(x) = \frac{2}{3}$.

Gutes Gelingen!