Übungen Vektoranalysis – SS2015(PHY.E20)
Endklausur – 23.6.2015 – Gruppe B

Name: Matrikelnummer:

Aufgabe 1: Verifiziere den Satz von Stokes für folgendes Beispiel, indem Du die Integrale auf beiden Seiten der Gleichung berechnest:

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

Das Vektorfeld ist gegeben durch $\vec{F} = (y, z, x)$, S ist die Halbkugelschale

$$S \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1,\, z \geq 0,$$

und ∂S dementsprechend der Einheitskreis in der xy-Ebene. Hinweis: Für das Flächenelement $d\vec{A}$ kann das Ergebnis für die Koordinatenfläche $r = const.$ bei Kugelkoordinaten übernommen werden.

(12 Punkte)

Aufgabe 2: Berechne folgendes Integral mit Hilfe eines geeigneten Integralsatzes

$$I = \int_{\partial W} \begin{pmatrix} x^2 + y^2 z^2 \\ y^2 + e^{x^2+z^2} \\ z^2 - \sin^2 x \end{pmatrix} \cdot d\vec{A}.$$

Hierbei ist ∂W die Oberfläche eines Einheitswürfels mit den Eckpunkten (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (0, 0, 0).

(10 Punkte)

Aufgabe 3: Berechne folgenden Ausdruck in Koordinatenschreibweise ($\vec{r} \to x_i$, $r \to |\vec{r}| = (x_s x_s)^{\frac{1}{2}}$ und schreibe das Ergebnis wieder in Vektorform an:

$$\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r}\right) = ?$$

(8 Punkte)

Aufgabe 4: Die orthogonalen krummlinigen Toruskoordinaten sind durch folgende Transformation definiert:

$$\begin{aligned} x_1(\rho, u, v) &= (R + \rho \sin u) \cos v \\ x_2(\rho, u, v) &= (R + \rho \sin u) \sin v \\ x_3(\rho, u, v) &= \rho \cos u, \end{aligned}$$

wobei die krummlinigen Koordinaten ρ, u, v dabei folgende Werte annehmen können $\rho > 0$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, 2\pi]$, und $R > 0$ eine feste Zahl ist.

a) Berechne die metrischen Koeffizienten h_ρ, h_u, und h_v.

b) Berechne weiters das Volumen eines Torus: $\rho \in [0, r], u \in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi]$.

(10 Punkte)

Gutes Gelingen!