

# Übungen Vektoranalysis – SS2015(PHY.E20)

## Endklausur – 23.6.2015 – Gruppe A

Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 1:** Die orthogonalen krummlinigen Toruskoordinaten sind durch folgende Transformation definiert:

$$\begin{aligned}x_1(\rho, s, t) &= (R + \rho \cos s) \cos t \\x_2(\rho, s, t) &= (R + \rho \cos s) \sin t \\x_3(\rho, s, t) &= \rho \sin s,\end{aligned}$$

wobei die krummlinigen Koordinaten  $\rho, s, t$  dabei folgende Werte annehmen können  $\rho > 0$ ,  $s \in [0, 2\pi]$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , und  $R > 0$  eine feste Zahl ist.

a) Berechne die metrischen Koeffizienten  $h_\rho$ ,  $h_s$ , und  $h_t$ .

b) Berechne weiters die Oberfläche eines Torus (Koordinatenfläche  $\rho = r = \text{const}$ ).

(10 Punkte)

**Aufgabe 2:** Berechne folgenden Ausdruck in Koordinatenschreibweise ( $\vec{r} \rightarrow x_i$ ,  $r \rightarrow |\vec{r}| = (x_s x_s)^{\frac{1}{2}}$ ) und schreibe das Ergebnis wieder in Vektorform an:

$$\text{grad} \left( \text{div} \frac{\vec{r}}{r} \right) = ?$$

(8 Punkte)

**Aufgabe 3:** Berechne folgendes Integral mit Hilfe eines geeigneten Integralsatzes

$$I = \int_{\partial W} \begin{pmatrix} x^2 + e^{y^2+z^2} \\ y^2 + x^2 z^2 \\ z^2 - e^y \end{pmatrix} \cdot d\vec{A}.$$

Hierbei ist  $\partial W$  die Oberfläche eines Einheitswürfels mit den Eckpunkten  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 1)$ ,  $(0, 0, 0)$ .

(10 Punkte)

**Aufgabe 4:** Verifiziere den Satz von Stokes für folgendes Beispiel, indem Du die Integrale auf beiden Seiten der Gleichung berechnest:

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

Das Vektorfeld ist gegeben durch  $\vec{F} = (z, x, y)$ ,  $S$  ist die Halbkugelschale

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0,$$

und  $\partial S$  dementsprechend der Einheitskreis in der  $xy$ -Ebene. Hinweis: Für das Flächenelement  $d\vec{A}$  kann das Ergebnis für die Koordinatenfläche  $r = \text{const.}$  bei Kugelkoordinaten übernommen werden.

*(12 Punkte)*

Gutes Gelingen!