KFU Graz

Dénes Sexty (denes.sexty@uni-graz.at)

Gewönliche und Partielle Differentialgleichungen SS 24

Übungsklausur 2. 28.06, 14:00

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Aufgabe: (5 Punkte)

Ein Federpendel mit Masse M, Federkonstante k und Reibungskoeffizient μ wird periodisch mit einer Kraft $F(t) = \sin(\omega t)$ angeregt. Damit lautet die Bewegungsgleichung

$$M\ddot{x}(t) + \mu\dot{x}(t) + kx(t) = \sin(\omega t) \tag{1}$$

Lösen Sie diese Gleichung für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = 0$. Welche Funktion beschreibt die Bewegung nach langer Zeit?

2. Aufgabe: (5 Punkte)

Geben Sie die generelle Lösung von folgendem Differentialgleichungssystem an.

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 2y_1(t) + 2y_2(t) + t \\ y_2'(t) &= y_1(t) + 2y_2(t) \end{aligned}$$

3. Aufgabe: (5 Punkte)

Betrachten Sie das folgende Differentialgleichungensystem:

$$\begin{aligned} x'(t) &= x + y - 1 \\ y'(t) &= y(x + 2y + 1). \end{aligned}$$

Wie viele kritische Punkte hat das System? Klassifizieren Sie diese.

4. Aufgabe: (5 Punkte) Berechnen Sie die Green-funktion vom folgenden Randwertproblem:

$$y''(x) - k^2 y(x) = 0, \ \ y(-1/k) = y(1/k) = 0 \tag{2}$$

Partielle Differentialgleichungen

5. Aufgabe: (3 Punkte)

Verwenden Sie einen Separationsansatz um mindenstens eine nichttriviale Lösung der folgenden partiellen Differenzialgleichung zu finden

$$\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} u(x, y) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) - u = 0 \tag{3}$$

6. Aufgabe: (7 Punkte)

Lösen Sie die 2-dimensionale Laplace-Gleichung auf dem Einheitskreis:

$$\triangle u(x, y) = 0, \quad x^2 + y^2 < 1 \tag{4}$$

Mit den Randbedingungen:

$$u(\cos\varphi, \sin\varphi) = 1 - 2\sin 2\varphi \tag{5}$$