VU Prüfung GDGL, 2. Termin

-

2.10..2020

1 k-Lipschitzbedingungen, Kontraktionen, Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems

1. Es sei $D \in \mathbb{R}$ offen und f eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$.
   Was bedeuten die folgenden drei Aussagen für die mögliche Existenz von Lipschitzbedingungen?
   a) $x_0 \in D$. f ist differenzierbar an der Stelle x_0.
   b) $x_0 \in D$. f ist differenzierbar für beliebige $x_0 \in D$.
   c) $x_0 \in D$. f ist nicht differenzierbar an der Stelle x_0.

2. Gegeben ist $x \mapsto ax^2$, wobei gilt $a, x \in \mathbb{R}$ und $x, a \in [0, \eta]$ $0 < \eta < \frac{1}{2}$
   Ist diese Abbildung eine Kontraktion? Wenn ja, was ist ihr Fixpunkt?
   Beachten Sie: $|x^2 - y^2| = |x + y||x - y|$ *und falls* $|x|, |y|$ *beschränkt mit Schranke* M *folgt sofort* $|x^2 - y^2| \leq 2M|x - y|$

3. Gegeben sind DGLn der Form $y' - f(y) = 0$. Erfüllen die Funktionen f auf den angegebenen Definitionsbereichen eine k-Lipschitzbedingung? Berechnen Sie außerdem die allgemeine Lösung der DGL!
   a) $y' - |y| = 0 \qquad y \in \mathbb{R}$
      z.B. mit Fallunterscheidung!
   b) $y' - \frac{1}{y} = 0 \qquad y \in [1, +\infty)$

2 Systeme linearer DGLn 1. Ordnung und verwandte Probleme

Wir betrachten jetzt Systeme der Form $\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{b}(x)$
mit $(x, y) \in I \times D_n$, wobei $I \subseteq \mathbb{R} \quad D_n \subseteq \mathbb{R}^n$
$\vec{b} : I \to \mathbb{R}^n \qquad a_{ik} : I \to \mathbb{R} \quad 1 \leq i, k \leq n$
versehen mit der üblichen Maximums(supremums)norm.

1. Die Matrix $A(x)$ sei bezüglich der Norm beschränkt und $\vec{b}(x) = 0 \quad \forall x \in I$.
   Besitzt dann ein Anfangswertproblem mit $\vec{y}(x_0) = \vec{y_0} \quad \vec{y_0} \in D_n, x_0 \in I$ eine eindeutige Lösung?
   Wenn ja, begründen Sie das mit der in der Vorlesung verwendeten Norm.

2. $\vec{\psi_k}(x) \quad 1 \leq k \leq n$ sei ein Fundamentalsystem für $\vec{y}' = A\vec{y}$.
   a) Was bedeutet das für die Funktionen? (eine Eigenschaft)
   b) Wie stellen Sie fest, ob es sich wirklich um ein Fundamentalsystem handelt?
   c) Wie sieht dann die allgemeine Lösung des homogenen Systems aus?

3. Wie finden Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems über die Variation der Konstanten?

4. Wir betrachten nun die Resolvente eines homogenen Systems.
   a) Wie kann man mithilfe der Resolvente die Lösung des Anfangswertproblems definieren?
      Wir fordern nun weiter, dass $\forall x_1, x_2 \in I : R(x_1, x_2)$ ist invertierbar.
   b) Wie sieht die DGL für die Resolvente aus? Besitzt diese eine Lösung?
   c) Welche (3) Eigenschaften erfüllt die Resolvente, sodass sie unter der Matrixmultiplikation $R(x_1, x_2) = R(x_1, x)R(x, x_2)$ eine Gruppe bildet?

5. A sei konstant und habe keine entarteten Eigenwerte. Wie sieht die Lösung des homogenen Systems mit den Anfangswerten $\vec{y}(x_0) = \vec{y_0}$ aus? Treten komplexe Wurzeln auf, was bedeutet das dann für diese?

6. Schreiben Sie eine lineare DGL n-ter Ordnung in n lineare DGLs erster Ordnung um.

7. Gegeben ist das System $\vec{y}' = A\vec{y}$, A sei dabei konstant.
   Wann ist die Lösung
   a) stabil?
   b) asymptotisch stabil?
   c) instabil?

3 Randwertprobleme für L(y)=(py')'+qy

1. Wie sieht der adjungierte Operator $L^\dagger$ für $L(y) = y'' - x^2 y$ mit $y(x_0) = y(x_1) = 0$ aus?
   Tipp: Es gilt $\int_{x_0}^{x_1} uL(v)dx = \int_{x_0}^{x_1} L^\dagger(u)vdx$ - zu zeigen mit partieller Integration!

2. Definieren Sie den Begriff einer Greenschen Funktion zu gegebenen Randbedingungen. Wozu nützen wir die Greensche Funktion?

3. Gegeben ist ein Operator $L(y) = y''$.
   Im Folgenden soll mit den Eigenschaften der Greenschen Funktion, wie sie in der Übung definiert wurden, gearbeitet werden.
   Die Greensche Funktion für das inhomogene Problem ist $G(x,\xi) = (\xi - x)\Theta(\xi - x)$ mit den Randbedingungen $\phi(+\infty) = \phi(-\infty) = 0$ ausreichend schnell, sodass $\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x)|dx < \infty$ für $\phi(x)$ ist Lösung des homogenen oder inhomogenen Problems.
   Das sind die gleichen Randbedingungen, die auch in der Übung aufgetaucht sind.
   a) Berechnen Sie mit der Greenschen Funktion die Lösung von $y'' = e^{-x^2}$
      Achtung: Manche Funktionen lassen sich nur über Integralausdrücke darstellen.
   b) Überprüfen Sie, ob Ihre gefundene Lösung die DGL erfüllt! *Verwenden Sie dazu die Leibnitz-Regel (Ableitung von Parameterintegralen)!*

Gutes Gelingen!