VU Prüfung GDGL

-

7.7.2020

1 k-Lipschitzbedingungen, Kontraktionen, Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems

1. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R} \qquad D \subseteq \mathbb{R}$ genügt auf D einer k-Lipschitzbedingung.
   a) Definieren Sie diese Bedingung!
   b) Was bedeutet das weiters für die Funktion? (2 Antworten)

2. Gegeben ist eine lineare Abbildung der Form $x \to ax + b \quad x, a, b \in [0, +\infty)$
   a) Genügt die Funktion auf $[0, +\infty)$ einer k-Lipschitzbedingung?
   b) Gibt es $a, b \in [0, +\infty)$, sodass die Funktion eine Kontraktion ist?
   Wenn ja, was ist dann der Fixpunkt?

3. Gegeben sind DGLn der Form $y' - f(y) = 0$. Erfüllen die Funktionen f auf den angegebenen Definitionsbereichen eine k-Lipschitzbedingung? Berechnen Sie außerdem die allgemeine Lösung der DGL!
   a) $y' - y^2 = 0 \qquad y^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   Es gilt $|y_1^2 - y_2^2| \leq 2max\{|a|, |b|\}|y_1 - y_2| \qquad y^2 : [a, b] \to \mathbb{R}$
   b) $y' - \sqrt{y} = 0 \qquad +\sqrt{y} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$
   Beachten Sie die Ableitung dieser Funktion!

2 Systeme linearer DGLn 1. Ordnung und verwandte Probleme

Wir betrachten jetzt Systeme der Form $\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{b}(x)$
mit $(x, y) \in I \times D_n$, wobei $I \subseteq \mathbb{R} \quad D_n \subseteq \mathbb{R}^n$

$\vec{b}: I \to \mathbb{R}^n \qquad a_{ik}: I \to \mathbb{R} \quad 1 \leq i, k \leq n$
versehen mit der üblichen Maximums(supremums)norm.

1. Die Matrix $A(x)$ sei bezüglich der Norm beschränkt und $\vec{b}(x) = 0 \quad \forall x \in I$.
   Besitzt dann ein Anfangswertproblem mit $\vec{y}(x_0) = \vec{y_0} \quad \vec{y_0} \in D_n, x_0 \in I$ eine eindeutige Lösung?
   Wenn ja, begründen Sie das!

2. $\vec{\psi}$ sei eine Lösung von $\vec{y}' = A\vec{y}$. $\vec{\phi}$ sei eine Lösung von $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}$.
   a) Zeigen Sie, dass $\vec{\psi} + \vec{\phi}$ eine Lösung des inhomogenen Systems ist.
   b) Es gilt nun $\vec{\phi}(x_0) = 0 \quad \vec{\psi}(x_0) = \vec{y_0}$. Zeigen Sie, dass $\vec{\psi} + \vec{\phi}$ das Anfangswertproblem des inhomogenen Problems mit Anfangswert $\vec{y_0}$ löst.

3. $\vec{\psi_k}(x) \quad 1 \leq k \leq n$ sei ein Fundamentalsystem für $\vec{y}' = A\vec{y}$.
   a) Was bedeutet das für die Funktionen? (eine Eigenschaft)
   b) Wie stellen Sie fest, ob es sich wirklich um ein Fundamentalsystem handelt?
   c) Wie sieht dann die allgemeine Lösung des homogenen Systems aus?

4. Sie finden $n + 1$ Lösungen für das homogene System. Was bedeutet das für die n+1 Lösungen?

5. Wie finden Sie die allgemeine Lösung des Inhomogenen Problems über die Variation der Konstanten?

6. Wir betrachten nun die Resolvente eines homogenen Systems.
   a) Wie kann man mithilfe der Resolvente die Lösung des Anfangswertproblems definieren?
      Wir fordern nun weiter, dass $\forall x_1, x_2 \in I : R(x_1, x_2)$ *ist invertierbar.*
   b) Wie sieht die Resolvente aus?
   c) Welche (3) Eigenschaften erfüllt die Resolvente, sodass sie eine Gruppe bildet?

7. A sei konstant und habe keine entarteten Eigenwerte. Wie sieht die Lösung des homogenen Systems mit den Anfangswerten $\vec{y}(x_0) = \vec{y_0}$ aus? Treten komplexe Wurzeln auf, was bedeutet das dann für diese?

8. Was haben lineare DGLn n-ter Ordnung mit linearen Systemen 1. Ordnung der Dimension n zu tun? Zeigen Sie den Zusammenhang!

9. Definieren Sie den Begriff der Wronski-Determinante. Was zeigt uns diese?

10. Gegeben ist das System $\vec{y}' = A\vec{y}$, A sei dabei konstant.
    Wann ist die Lösung
    a) stabil?
    b) asymptotisch stabil?
    c) instabil?

3 Randwertprobleme für L(y)=(py')'+qy'

1. Wie sieht der adjungierte Operator $L^\dagger$ für $L(y) = y''$ mit $y(x_0) = y(x_1) = 0$ aus?
   Tipp: Es gilt $\int_{x_0}^{x_1} uL(v)dx = \int_{x_0}^{x_1} L^\dagger(u)vdx$

2. Besitzt das Randwertproblem $y'' + y = 0$ mit den Randwerten
   a) $y(0) = y(1) = 0$ eine Lösung?
   b) $y(0) = y(\pi) = 0$ eine Lösung?

3. Definieren Sie den Begriff einer Greenschen Funktion zu gegebenen Randbedingungen. Wozu nützen wir die Greensche Funktion?

4. Gegeben ist ein Operator $L(y) = y''$.
   Im Folgenden soll mit den Eigenschaften der Greenschen Funktion, wie sie in der Übung definiert wurden, gearbeitet werden.
   Die Greensche Funktion für das inhomogene Problem ist $G(x, \xi) = (\xi - x)\Theta(\xi - x)$ mit den Randbedingungen $\phi(+\infty) = \phi(-\infty) = 0$ ausreichend schnell, sodass $\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x)|dx < \infty$ für $\phi(x)$ ist Lösung des homogenen oder inhomogenen Problems.
   Das sind die gleichen Randbedingungen, die auch in der Übung aufgetaucht sind.

   a) Berechnen Sie mit der Greenschen Funktion die Lösung von $y'' = e^{-x^2}$
      Achtung: Manche Funktionen lassen sich nur über Integralausdrücke darstellen.

   b) Überprüfen Sie, ob Ihre gefundene Lösung die DGL erfüllt! *Verwenden Sie dazu die Leibnitz-Regel (Ableitung von Parameterintegralen)!*

Gutes Gelingen!