Gewöhnliche und partielle DGL

Vorlesungsprüfung

Dr. Markus Holzmann

4. Juli 2025

Name: ______________________ Matr.-Nr.: ______________

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**. Bitte beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen! Es können maximal 20 Punkte erreicht werden.

Bitte dieses Feld NICHT ausfüllen:

1	2	3	4	5	$\sum$

Viel Erfolg!

Ansatztabelle:

Inhomogenität $h(x)$	Ansatz für $y_p(x)$
$\alpha_0 + \cdots + \alpha_n x^n$	$\beta_0 + \cdots + \beta_n x^n$
$\sin(kx)$	$\delta_1 \sin(kx) + \delta_2 \cos(kx)$
$\cos(kx)$	$\delta_1 \sin(kx) + \delta_2 \cos(kx)$
$P_n(x)\sin(kx) + Q_n \cos(kx)$	$R_n(x)\sin(kx) + S_n(x)\cos(kx)$
$\alpha e^{\mu x}$	$\beta e^{\mu x}$
$e^{\mu x} P_n(x)$	$e^{\mu x} Q_n(x)$
$e^{\mu x}\big(P_n(x)\sin(kx) + Q_n(x)\cos(kx)\big)$	$e^{\mu x}\big(R_n(x)\sin(kx) + S_n(x)\cos(kx)\big)$

Dabei sind $P_n(x), Q_n(x), R_n(x), S_n(x)$ jeweils Polynome n-ten Grades. In der 1., 5., 6. und 7. Zeile sind äußere Resonanzen zu beachten!

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$u'''(t) + 2u''(t) - u'(t) - 2u(t) = 6e^t.$$

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

HINWEIS: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \frac{2x+2}{\cos(y)}, \qquad y(0) = 0.$$

Geben Sie den größtmöglichen Bereich um $x = 0$ an, in dem die Lösung sinnvoll erklärt werden kann.

Aufgabe 4: (2 Punkte)

Welche Aussage kann mit dem Satz von Picard-Lindelöf (beliebige Version) über die Lösbarkeit des Anfangswertproblems

$$y'(x) = x\sqrt[4]{y(x) - 1}, \quad y(0) = 1,$$

getroffen werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Bestimmen Sie mittels Separationsansatz $u(x, y) = X(x)Y(y)$ *eine* nicht-triviale Lösung $u(x, y) \neq 0$ der Gleichung

$$2\frac{\partial}{\partial x}u(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, y) + \frac{1}{\cos(y)}\frac{\partial}{\partial y}u(x, y) = 0, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$