Gewöhnliche und partielle DGL

Vorlesungsprüfung

Dr. Markus Holzmann

5. Februar 2026

Name: ______________________ Matr.-Nr.: ______________

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**. Bitte beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen! Es können maximal 20 Punkte erreicht werden.

Bitte dieses Feld NICHT ausfüllen:

1	2	3	4	5	$\sum$

Viel Erfolg!

Ansatztabelle:

Inhomogenität $h(x)$	Ansatz für $y_p(x)$
$\alpha_0 + \cdots + \alpha_n x^n$	$\beta_0 + \cdots + \beta_n x^n$
$\sin(kx)$	$\delta_1 \sin(kx) + \delta_2 \cos(kx)$
$\cos(kx)$	$\delta_1 \sin(kx) + \delta_2 \cos(kx)$
$P_n(x) \sin(kx) + Q_n \cos(kx)$	$R_n(x) \sin(kx) + S_n(x) \cos(kx)$
$\alpha e^{\mu x}$	$\beta e^{\mu x}$
$e^{\mu x} P_n(x)$	$e^{\mu x} Q_n(x)$
$e^{\mu x} \big(P_n(x) \sin(kx) + Q_n(x) \cos(kx)\big)$	$e^{\mu x} \big(R_n(x) \sin(kx) + S_n(x) \cos(kx)\big)$

Dabei sind $P_n(x), Q_n(x), R_n(x), S_n(x)$ jeweils Polynome n-ten Grades. In der 1., 5., 6. und 7. Zeile sind äußere Resonanzen zu beachten!

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u_{tt}(t,x) &= \frac{1}{16}u_{xx}(t,x), && x \in \mathbb{R}, t \in (0,\infty), \\ u(0,x) &= 2x^2, && x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) &= x, && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Führen Sie eine Probe durch, ob die erhaltene Funktion tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems ist.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$u''(t) - 4u'(t) + 5u(t) = 15t - 12, \qquad u(0) = 2, \quad u'(0) = 4,$$

an.

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = -3e^{y(x)}, \qquad y(1) = 0.$$

Geben Sie den größtmöglichen Bereich um $x = 1$ an, in dem die Lösung sinnvoll erklärt werden kann.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$t^2u''(t) + tu'(t) = t, \qquad t > 0. \tag{1}$$

Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Zeigen Sie durch Nachrechnen, dass $u_1(t) = 1$ und $u_2(t) = \ln t$ Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung sind.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung von (1).