Prof. Dr. A. Maas
Institut für Physik

N A W I
G R A Z

Einführung in die mathematischen Methoden

WS 2017/18, 1. Wiederholungsklausur

20. November 2017

Name: ______________________ ID Nummer: __________

Matrikelnummer: ______________________

Notieren Sie auf jeder Seite Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die ID Nummer. Zum bestehen der Klausur sind maximal 51 Punkte erforderlich. Begründen Sie alle Antworten! Lediglich ein Ergebnis führt zu Punktabzug.

K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	$\sum$	Note

Aufgabe K1: Gleichungen (2+8+4+4+2=20 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen für reelle x:

a) $x^2 + 1 = 0$ b) $\cos(x) = 0$ c) $x^4 - x^2 = 0$ d) $\frac{x^2-a}{2x-d} = 0$ e) $\exp(x + 1) = 1$

Aufgabe K2: Ableitungen (4+6+8+4+4=26 Punkte)

Bestimmen Sie die ersten und zweiten Ableitungen der folgenden Funktionen von einem reellen x:

a) $\exp(2(x+a))$ b) $\ln\sin(x)$ c) $\exp(x^\pi)$ d) $\ln(x+1)$ e) $\exp(\sin^2(x))\exp(\cos^2(x))$

Aufgabe K3: Funktionen (6+2+6+10=24 Punkte)

Bestimmen Sie den Bildbereich der folgenden Funktionen sowohl für der Fall eines reellen wie eines imaginären x:

a) $\frac{e^{-x}+e^x}{2}$ b) x^3 c) $xx^* - x^2$ d) $\exp(1/x)$

Aufgabe K4: Kurvendiskussion (40 Punkte)

Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = x^3\exp(-x^2) + e^4/8$ mit x und $a > 0$ reell mindestens eine Nullstelle, sowie alle Extrema einschließlich ihrer Typen sowie Sattelpunkte. Geben Sie mathematische Beweise Ihrer Behauptungen.

Aufgabe K5: Integrale (6+8+8+4=26 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale der reellen Variablen x. Geben Sie auch immer die unbestimmten Integrale an.

a) $\int_0^1 dx \frac{1}{(1+x)^3}$ b) $-\int_0^\infty dx x^2 \exp(-\pi x^3)$ c) $\int_0^{1-z} dx \frac{x+y}{x+z}$, $z > 0$ d) $\int_\pi^e x^{\pi-e}$

Aufgabe K6: Komplexe Zahlen (20 Punkte)

Brechnen Sie alle 12 möglichen Summen und Produkte von $1/i$, $2-i$, $e^{i(\pi+i)}$, $1^{1/4}$ und bestimmen Sie explizit Real- und Imaginärteile.

Aufgabe K7: Vektoren (24 Punkte)

Bestimmen Sie die Längen, sowie paarweise Summne, Skalarprodukte und Kreuzprodukte der Vektoren $(a, -1, a)$, $(-a, 0, -a)$, $(1, -1, 0)$, gelesen als Spaltenvektoren.

Formelsammlung

$$x^a x^b = x^{a+b}; \quad (x^a)^b = x^{ab}; \quad \ln xy = \ln x + \ln y; \quad \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}; \quad z^* = \Re z - i\Im z$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos(2\alpha); \quad \tan(\alpha) = \sin(\alpha)/\cos(\alpha)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{df}{dx}; \quad \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}; \quad \frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x}; \quad \frac{da^x}{dx} = a^x \ln a; \quad \frac{d\sin x}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}; \quad \frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}; \quad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{dg(x)}{dx}\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=g(x)} = g'(x)f'(g(x)); \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)}{g(x+h)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ für } f(x) = g(x) = 0$$

$$A = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta x f(x_i) = \int_a^b dx f(x); \quad \int dx f(x) = F(x) + C \to \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

$$\int dx \sum_i a_i x^i = C + \sum_i \frac{a_i}{i+1}x^{i+1}; \quad \int dx x^a = C + \frac{x^{a+1}}{a+1} \text{ if } a \neq -1; \quad \int dx \frac{1}{x} = \ln x$$

$$\int dx \sin(x) = C - \cos(x); \quad \int dx \cos(x) = C + \sin(x); \quad \int dx \ln(x) = C - x + x\ln x; \quad |\vec{a}| = \sqrt{\sum_i a_i^2}$$

$$\int dx a^x = C + \frac{a^x}{\ln(a)}; \quad \int dx e^{ax} = C + \frac{e^{ax}}{a}; \quad \int_a^b dx f(x)\frac{dg(x)}{dx} = -\int_a^b dx \frac{df(x)}{dx}g(x) + (f(x)g(x))|_a^b$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_i a_i b_i = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha; \quad \vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$P_{nk}^p = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}; \quad \int_a^b dy f(y) = \int_a^b dx \frac{dy}{dx} f(y) = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} dx \frac{dg(x)}{dx} f(g(x))$$