Prof. Dr. A. Maas
Institut für Physik

N A W I
G R A Z

Einführung in die mathematischen Methoden

WS 2015/16, 1. Wiederholungsklausur

23. November 2015

Name: ______________________ ID Nummer: ____________

Matrikelnummer: ______________________

Notieren Sie auf jeder Seite Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die ID Nummer. Zum bestehen der Klausur sind maximal 51 Punkte erforderlich. Begründen Sie alle Antworten! Lediglich ein Ergebnis führt zu Punktabzug.

K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	$\sum$	Note

Aufgabe K1: Gleichungen (2+8+4+4+2=20 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen für reelle x:

a) $x^2 - 1 = 0$ b) $\sin(x) = \pi/4$ c) $x^4 + x^2 = 0$ d) $\frac{x+a}{x-d} = b$ e) $\frac{x^2+a}{x-d} = 0$

Aufgabe K2: Ableitungen (4+6+8+4+4=26 Punkte)

Bestimmen Sie die ersten und zweiten Ableitungen der folgenden Funktionen von einem reellen x:

a) $\exp(\pi x)$ b) $\sin \ln(x)$ c) $(x + \cos x)^a$ d) $\ln(x \exp(x^2))$ e) $\frac{x+1}{x-1}$

Aufgabe K3: Funktionen (6+2+8+8=24 Punkte)

Bestimmen Sie den Bildbereich der folgenden Funktionen sowohl für der Fall eines reellen wie eines imaginären x:

a) $\frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{x}+e^{-x}}$ b) x^2 c) $\frac{13}{2}(\sin x)^2$ d) $\sin \frac{1}{x}$

Aufgabe K4: Kurvendiskussion (40 Punkte)

Bestimmen Sie für die Funktion $x^4 - 2x^2 + x$ mit x reell alle Nullstellen, Extrema einschließlich ihrer Typen sowie Sattelpunkte. Geben Sie mathematische Beweise Ihrer Behauptungen. Sie können die numerischen Werte der Lösungen der Gleichung $x^3 - x + 1/4 =$

0 als x_1, x_2 und x_3 implizit lassen.

Aufgabe K5: Integrale (6+8+8+4+26 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale der reellen Variablen x. Geben Sie auch immer die unbestimmten Integrale an.

a) $\int_0^1 dx \frac{1}{(1+x)^2}$ b) $\int_\pi^{2\pi} dx \ln(xa)$ c) $\int_0^\pi dx(1+2x)\cos(x+x^2)$ d) $\int_a^b \sin\frac{3x}{4}$

Aufgabe K6: Komplexe Zahlen (20 Punkte)

Brechnen Sie alle möglichen Summen und Produkte von $(i-1)$, $\exp(i(\pi+i\pi))$, $(-1)^{\frac{1}{4}}$, $(i+1)$ und bestimmen Sie explizit Real- und Imaginärteile.

Aufgabe K7: Vektoren (24 Punkte)

Bestimmen Sie die paarweise Summe, Skalarprodukt und Kreuzprodukt sowie Längen der Vektoren $(0,b,0)$, $(2,-2,1)$, $(-b,1,c)$, gelesen als Spaltenvektoren.

Formelsammlung

$$x^a x^b = x^{a+b}; \qquad (x^a)^b = x^{ab}; \quad \ln xy = \ln x + \ln y; \quad \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}; \quad z^* = \Re z - i\Im z$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos(2\alpha); \quad \tan(\alpha) = \sin(\alpha)/\cos(\alpha)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{df}{dx}; \quad \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}; \quad \frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x}; \quad \frac{da^x}{dx} = a^x\ln a; \quad \frac{d\sin x}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}; \quad \frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}; \quad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{dg(x)}{dx}\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=g(x)} = g'(x)f'(g(x)); \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)}{g(x+h)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ für } f(x) = g(x) = 0$$

$$A = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N-1}\Delta x f(x_i) = \int_a^b dx f(x); \quad \int dx f(x) = F(x) + C \to \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

$$\int dx \sum_i a_i x^i = C + \sum_i \frac{a_i}{i+1}x^{i+1}; \quad \int dx x^a = C + \frac{a+1}{x}^{a+1} \text{ if } a \neq -1; \quad \int dx\frac{1}{x} = \ln x$$

$$\int dx\sin(x) = C - \cos(x); \quad \int dx\cos(x) = C + \sin(x); \quad \int dx\ln(x) = C - x + x\ln x; \quad |\vec{a}| = \sqrt{\sum_i a_i^2}$$

$$\int dx a^x = C + \frac{a^x}{\ln(a)}; \quad \int dx e^{ax} = C + \frac{e^{ax}}{a}; \quad \int_a^b dx f(x)\frac{dg(x)}{dx} = -\int_a^b dx\frac{df(x)}{dx}g(x) + (f(x)g(x))|_a^b$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_i a_i b_i = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha; \quad \vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$P_{nk}^p = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}; \quad \int_a^b dy f(y) = \int_a^b dx\frac{dy}{dx}f(y) = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} dx\frac{dg(x)}{dx}f(g(x))$$