Prof. Dr. A. Maas
Institut für Physik

N A W I
G R A Z

Einführung in die mathematischen Methoden

WS 2017/18, Klausur

23. Oktober 2017

Name: ______________________ ID Nummer: __________

Matrikelnummer: ______________________

Notieren Sie auf jeder Seite Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die ID Nummer. Zum bestehen der Klausur sind maximal 50 Punkte erforderlich. Begründen Sie alle Antworten! Lediglich ein Ergebnis führt zu Punktabzug.

K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8	$\sum$	Note

Aufgabe K1: Funktionen (2+2+4+3+4=15 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen für reelle x:

a) $ax - b = d$ b) $\exp(x+1) = 3$ c) $x^2 - x = 0$ d) $x^4 = 81$ e) $|\sqrt{x-2}| = x$

Aufgabe K2: Ableitungen (4+6+8+8=26 Punkte)

Bestimmen Sie die ersten und zweiten Ableitungen der folgenden Funktionen von einem reellen x:

a) $x^{1+\ln a}$ b) $\exp\cos(x)$ c) $x^3 - \cos^2(x+1) - \pi - \sin^2(x-1)$ d) $\exp(\sqrt{x^2+1})$

Aufgabe K3: Mehr Funktionen (3+3+3=9 Punkte)

Bestimmen Sie den Definitionbereich der folgenden Funktionen sowohl für der Fall eines reellen wie eines komplexen x:

a) $1/(x^4+1)$ b) $\sin^{-1}(x)$ c) x

Aufgabe K4: Kurvendiskussion (30 Punkte)

Bestimmen Sie für die Funktion $+\sqrt{1+\sin(x)}$ mit x reell alle Minima, Maxima und Sattelpunkte auf dem halboffenen Intervall $[0, 2\pi)$. Beweisen Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe K5: Integrale (8+8+8=24 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Integrale der reellen Variablen x. Geben Sie auch immer die unbestimmten Integrale an.
a) $\int_{-1}^{1} dx(x^3 - x)$ b) $\int_0^\infty dx x^3 \exp(-x^4)$ c) $\int_0^1 dx(1/((\cos(x))^2 - 1)$

Aufgabe K6: Komplexe Zahlen (18 Punkte)

Brechnen Sie alle möglichen Summen und Produkte von $(1-i)$, $(1-i)^*$, $\exp(-i\pi/2)$ und bestimmen Sie explizit Real- und Imaginärteile.

Aufgabe K7: Vektoren (24 Punkte)

Bestimmen Sie die Längen, sowie paarweise Summe, Skalarprodukt und Kreuzprodukt der Vektoren $(0,1,0)$, $(a,0,a)$, $(0,-c,0)$, gelesen als Spaltenvektoren.

Aufgabe K8: Wahrscheinlichkeiten (30 Punkte)

Wenn Sie jede auf dem Weg hierher an 5 Ampeln vorbeikommen, die alle mit 40% Wahrscheinlichkeit rot sein können, und sie dürfen maximal an zwei stehen um rechtezitig zu sein, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß die rechtzeitig waren? Was ist die Wahrscheinlichkeit bei 20% und 3 Ampeln? Die Ampeln sind unkorreliert.

Formelsammlung

$$x^a x^b = x^{a+b}; \quad (x^a)^b = x^{ab}; \quad \ln xy = \ln x + \ln y; \quad \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}; \quad z^* = \Re z - i\Im z$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos(2\alpha); \quad \tan(\alpha) = \sin(\alpha)/\cos(\alpha)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{df}{dx}; \quad \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}; \quad \frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x}; \quad \frac{da^x}{dx} = a^x \ln a; \quad \frac{d\sin x}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}; \quad \frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}; \quad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{dg(x)}{dx}\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=g(x)} = g'(x)f'(g(x)); \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)}{g(x+h)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ für } f(x) = g(x) = 0$$

$$A = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N-1}\Delta x f(x_i) = \int_a^b dx f(x); \quad \int dx f(x) = F(x) + C \to \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

$$\int dx \sum_i a_i x^i = C + \sum_i \frac{a_i}{i+1}x^{i+1}; \quad \int dx x^a = C + \frac{x^{a+1}}{1+a} \text{ if } a \neq -1; \quad \int dx \frac{1}{x} = \ln x$$

$$\int dx \sin(x) = C - \cos(x); \quad \int dx \cos(x) = C + \sin(x); \quad \int dx \ln(x) = C - x + x\ln x; \quad |\vec{a}| = \sqrt{\sum_i a_i^2}$$

$$\int dx a^x = C + \frac{a^x}{\ln(a)}; \quad \int dx e^{ax} = C + \frac{e^{ax}}{a}; \quad \int_a^b dx f(x)\frac{dg(x)}{dx} = -\int_a^b dx \frac{df(x)}{dx}g(x) + (f(x)g(x))|_a^b$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_i a_i b_i = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha; \quad \vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$P_{nk}^p = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}; \quad \int_a^b dy f(y) = \int_a^b dx \frac{dy}{dx} f(y) = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} dx \frac{dg(x)}{dx} f(g(x))$$