

Wiederholungsklausur zur Vorlesung lineare Algebra

WS 2015/16

18. Februar 2016

Name: _____

Matrikelnummer: _____

ID Nummer: _____

Notieren Sie auf jeder Seite Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Zum bestehen der Klausur sind maximal 50 Punkte erforderlich. Begründen Sie alle
Antworten! Lediglich ein Ergebnis führt zu Punktabzug.

K6a	K6b	K6c	K7a	K7b	K8a	K8b	K8c	K8d	Σ	Note

Aufgabe K6: Matrixdiskussionen (6+16+12=34 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Matrix in der a ein reeller und c ein komplexer Parameter ist:

$$M = c \begin{pmatrix} 1 + ia & 1 + i \\ i - 1 & 1 - ia \end{pmatrix}$$

- Was sind Spur und Determinante der Matrix?
- Für welche Werte der Parameter ist die Matrix (speziell) unitär?
- Was sind Kern und Bild der Matrix?

Aufgabe K7: Morphismen (16+12=28 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Abbildung von dem \mathbb{R}^3 in den \mathbb{R}^2

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + y \\ z \end{pmatrix}$$

- Handelt es sich um einen Homomorphismus? Ist es ein Automorphismus? Finden Sie eine Matrixdarstellung dieser Abbildung!
- Ist die Abbildung winkel- und/oder längenerhaltend?

Bitte wenden.

Aufgabe K8: Eigenwerte und Eigenvektoren (10+18+4+6=38 Punkte)

Betrachten Sie die hermitesche Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix}$$

- Bestimmen Sie die Eigenwerte sowie die algebraischen Vielfachheiten.
- Bestimmen Sie die Eigenvektoren sowie die geometrischen Vielfachheiten.
- Ist die Matrix diagonalisierbar? Warum?
- Welche dieser Aussagen (und warum) können Sie treffen ohne die Rechnungen durchzuführen?

Formelsammlung

$A \circ B \in G$, $\langle v|w \rangle = v_i^* w_i$, $-A \in G$, $\vec{v} + \vec{w} \in V$, $a\vec{v} \in V$, bijektiv: injektiv+surjektiv

$$\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3, \quad \vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}, \quad (ab)\vec{v} = a(b\vec{v}), \quad a(\vec{v} + \vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}$$

$$(a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}, \quad 0\vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{v} = b_i \vec{e}_i: \vec{e}_i \text{ Basis}, \quad (\vec{c})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k, \quad |\vec{x}| > 0, \quad |\alpha\vec{v}| = |\alpha||\vec{v}|$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|, \quad \langle \vec{v}|\vec{w} \rangle = \alpha, \quad \langle \vec{v}|\vec{w} \rangle = \langle \vec{w}|\vec{v} \rangle^*, \quad \langle \vec{v}|a\vec{w} \rangle = a\langle \vec{v}|\vec{w} \rangle, \quad \vec{x}^T M \vec{x} + \vec{b}^T \vec{x} + r = 0$$

$$\langle \vec{v}|\vec{u} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}|\vec{u} \rangle + \langle \vec{v}|\vec{w} \rangle, \quad \langle \vec{v}|\vec{v} \rangle \geq 0, \quad \langle \vec{v}|\vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}, \quad \langle v|w \rangle = g_{ij} v_i^* w_j, \quad 0 \in G$$

$$(M\vec{v})_i = M_{ij} v_j, \quad (w^T M)_j = w_i M_{ij}, \quad \langle w|M|v \rangle = w_i^* M_{ij} v_j, \quad \text{surjektiv } \forall \vec{v}' \exists \vec{v}$$

$$(M^\dagger)_{ij} = M_{ji}^*, \quad (M+N)_{ij} = M_{ij} + N_{ij}, \quad (NM)_{ij} = N_{ik} M_{kj}, \quad AB \neq BA, \quad \text{tr} M = m_{ii}$$

$$\text{tr} AB = \text{tr} BA, \quad \text{tr} A^\dagger = (\text{tr} A)^*, \quad \text{tr} kA = k \text{tr} A = k A_{ii}, \quad \det A = \frac{1}{n!} \sum_{i_k} \sum_{j_m} \epsilon_{i_1 \dots i_n} \epsilon_{j_1 \dots j_n} \prod_l a_{i_l j_l}$$

$$\det A^\dagger = (\det A)^*, \quad \det kA = k^n \det A, \quad \det(AB) = \det(BA), \quad 1 = \det AA^{-1}$$

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}, \quad A' = SAS^{-1}, \quad \det(A - \lambda 1) = 0, \quad \gamma_i \leq \mu_i, \quad \sum_{i=1}^m \gamma_i = n' \leq n$$

$$\text{Bild } \{A\vec{v}\}, \quad \text{Kern } \{\vec{v}|A\vec{v} = \vec{0}\}, \quad \text{Kohomologie: Bild/Kern}, \quad (\vec{f}_t)_i = (d\vec{f}(t)/dt)_i$$

$$\text{Diagonalisierbar} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m \gamma_i = n, \quad (M - \lambda 1)^n \vec{s} = \vec{0}, \quad \text{Permutation } P^2 = 1, \quad m_{ij} = (M\vec{e}^i)_j$$

$$\text{Unitär } U^\dagger U = 1, \quad \text{Hermitisch } H^\dagger = H, \quad \text{Speziell } \det A = 1, \quad \text{Projektion } P^2 = P$$

$$\text{Nilpotenz } N^2 = 0, \quad \text{Basistransformation } (U\vec{e}^i)_j, \quad \text{Tensoren } v'_{i_1 \dots i_n} = U_{j_1 i_1}^{-1} \dots U_{j_n i_n}^{-1} v_{j_1 \dots j_n}$$

$$x_i = \det A_{i \rightarrow b} / \det A, \quad \vec{c}_i = \vec{a}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle b_j | a_i \rangle \vec{b}_j, \quad m_{ij} = v_i w_j - v_j w_i, \quad \Lambda^T g \Lambda = g$$

$$M(\vec{a} + \vec{b}) = M\vec{a} + M\vec{b}, \quad M(\alpha\vec{a}) = \alpha M\vec{a}, \quad M\vec{0} = \vec{0}, \quad \text{Endo: } V = V, \quad \text{Auto: Endo+Iso}$$

$$\text{injektiv: } \vec{v} \neq \vec{w} \Rightarrow \vec{v}' \neq \vec{w}', \quad \text{Iso } \exists M^{-1}$$

Lösungen:

Aufgabe K6

a) $\det M = c^2(3 + a^2)$, $\operatorname{tr} M = 2c$

b) Da

$$MM^\dagger = |c|^2 \begin{pmatrix} 3 + a^2 & 0 \\ 0 & 3 + a^2 \end{pmatrix}$$

ist die Matrix für $|c| = \exp(i\phi)/\sqrt{3 + a^2}$ mit ϕ reell beliebig (oder $a = \pm\sqrt{1 - 3|z|^2}/|z|^2$) die Matrix unitär. Damit sie speziell unitär ist muß noch gelten $\det M = 1$, was dann der Fall ist, wenn zusätzlich noch $c = c^*$ gilt, also $\phi = 0$.

c) Für das Bild und den Kern ist der Faktor c irrelevant. Damit folgt

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1 + ia) + y(1 + i) \\ (i - 1)x + (1 - ia)y \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung hat nur eine triviale Lösung für $x = y = 0$. Damit ist der Kern immer nur der Nullvektor (außer für $c = 0$), was bereits an der Determinante ablesbar ist. Das Bild ist demnach der gesamte Raum.

Aufgabe K7: Morphismen

a) Ein Homomorphismus muß strukturerhaltend hinsichtlich der Vektoraddition sowie der skalaren Multiplikation sein, also ein linearer Operator. Da

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ \vec{0} &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 + 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \\ a\vec{v} &\rightarrow \begin{pmatrix} ax + ay \\ az \end{pmatrix} = a\vec{v} \end{aligned}$$

ist es einer. Die Matrixdarstellung muß eine nicht-quadratische Matrix sein, sie ist gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Da

$$\begin{aligned} \vec{v}^2 = v_i^2 &\rightarrow (M\vec{v})^T(M\vec{v}) = (v_1 + v_3)^2 + v_2^2 \\ \vec{w}^T \vec{v} = w_i v_i &\rightarrow (M\vec{w})^T(M\vec{v}) = w_2 v_2 + (w_1 + w_3)(x_1 + x_3) \end{aligned}$$

ist die Abbildung weder längen- noch winkelerhaltend.

Aufgabe K8

a) Die Eigenwerte sind $(1 \pm \sqrt{17})/2$ und haben damit je algebraische Vielfachheit 1.

b) Die Eigenvektoren ergeben sich zu

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} (1-i)(3+\sqrt{17}) \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} (1-i)(3+\sqrt{17}) \\ -4 \end{pmatrix}$$

Die geometrische Vielfachheit ist je 1.

c) Da die Summe der geometrischen Vielfachheit die Dimensionalität des Raumes ist, ist die Matrix diagonalisierbar.

d) Da es eine hermitesche Matrix ist, gilt das spektrale Theorem. Damit bilden die Eigenvektoren zu den reellen Eigenwerten eine orthogonale Basis, und damit ist die Matrix auch diagonalisierbar.