Prof. Dr. A. Maas
Institut für Physik

N A W I
G R A Z

Klausur zur Vorlesung lineare Algebra

WS 2015/16

01. Februar 2016

Name: ______________________

Matrikelnummer: ______________________ ID Nummer: ____________

Notieren Sie auf jeder Seite Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die ID Nummer. Zum bestehen der Klausur sind maximal 50 Punkte erforderlich. Begründen Sie alle Antworten! Lediglich ein Ergebnis führt zu Punktabzug.

K1a	K1b	K1c	K1d	K1e	K1f	K2a	K2b	K2c	K2d	$\sum$	Note

Aufgabe K1: Funktionenräume (12+12+12+18+4+8=66 Punkte)

a) Konstruieren Sie einen zweidimensionalen Funktionenraum mit den beiden Basisvektoren $\sin x$ und $\cos x$ über den komplexen Zahlen.

b) Sind Differentation und unbestimmte Integration (mit Integrationskonstante Null gesetzt) Automorphismen auf diesem Raum?

c) Zeigen Sie dass

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ I &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine Matrixdarstellung der Differentation (D) bzw. Integration (I) sind.

d) Was sind die Eigenwerte und Eigenvektoren, jeweils mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit, von D und I? Sind diese Matrizen diagonalisierbar?

e) Was sind Determinante und Spur dieser Matrizen?

f) Sind diese Matrizen speziell unitär? Sind sie hermitisch?

Bitte wenden.

Aufgabe K2: Rechnungen (8+8+4+14=34 Punkte)

Betrachten Sie den gewöhnlichen $\mathbb{C}^2$ mit dem Standardskalaprodukt. Berechnen Sie:

a) Das Skalarprodukt von $\vec{v} = \begin{pmatrix} i \\ -i \end{pmatrix}$ mit $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

b) Den Ausdruck $\exp M$ für $M = \begin{pmatrix} i\pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Die Summe und Differenz der Vektoren aus Aufgabenteil a.

d) Die Matrixmultiplikation von M mit $\vec{v}$ und $\vec{w}$ und bilden sie danach das Skalarprodukt beider Ergebnisse mit $\vec{v}$.

Formelsammlung

$A \circ B \in G$, $\langle v|w\rangle = v_i^* w_i$, $-A \in G$, $\vec{v}+\vec{w} \in V$, $a\vec{v} \in V$, bijektiv: injektiv+surjektiv

$\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3$, $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$, $(ab)\vec{v} = a(b\vec{v})$, $a(\vec{v} + \vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}$

$(a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$, $0\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{v} = b_i\vec{e}_i$: $\vec{e}_i$ Basis, $(\vec{c})_i = \epsilon_{ijk}a_jb_k$, $|\vec{x}| > 0$, $|\alpha\vec{v}| = |\alpha||\vec{v}|$

$|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$, $\langle\vec{v}|\vec{w}\rangle = \alpha$, $\langle\vec{v}|\vec{w}\rangle = \langle\vec{w}|\vec{v}\rangle^*$, $\langle\vec{v}|a\vec{w}\rangle = a\langle\vec{v}|\vec{w}\rangle$, $\vec{x}^T M\vec{x} + \vec{b}^T\vec{x} + r = 0$

$\langle\vec{v}|\vec{u} + \vec{w}\rangle = \langle\vec{v}|\vec{u}\rangle + \langle\vec{v}|\vec{w}\rangle$, $\langle\vec{v}|\vec{v}\rangle \geq 0$, $\langle\vec{v}|\vec{v}\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$, $\langle v|w\rangle = g_{ij}v_i^*w_j$, $0 \in G$

$(M\vec{v})_i = M_{ij}v_j$, $(w^TM)_j = w_iM_{ij}$, $\langle w|M|v\rangle = w_i^*M_{ij}v_j$, surjektiv $\forall\vec{v}'\exists\vec{v}$

$(M^\dagger)_{ij} = M_{ji}^*$, $(M+N)_{ij} = M_{ij} + N_{ij}$, $(NM)_{ij} = N_{ik}M_{kj}$, $AB \neq BA$, $\mathrm{tr}M = m_{ii}$

$\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}BA$, $\mathrm{tr}A^\dagger = (\mathrm{tr}A)^*$, $\mathrm{tr}kA = kA_{ii} = k\mathrm{tr}A$, $\det A = \frac{1}{n!}\sum_{i_k}\sum_{j_m}\epsilon_{i_1\ldots i_n}\epsilon_{j_1\ldots j_n}\Pi_l a_{i_lj_l}$

$\det A^\dagger = (\det A)^*$, $\det kA = k^n\det A$, $\det(AB) = \det(BA)$, $1 = \det AA^{-1}$

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$, $A' = SAS^{-1}$, $\det(A - \lambda 1) = 0$, $\gamma_i \leq \mu_i$, $\sum_{i=1}^m \gamma_i = n' \leq n$

Bild $\{A\vec{v}\}$, Kern $\{\vec{v}|A\vec{v} = \vec{0}\}$, Kohomologie: Bild/Kern, $(\vec{f}_t)_i = (d\vec{f}(t)/dt)_i$

Diagonaliserbar$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^m \gamma_i = n$, $(M - \lambda 1)^n\vec{s} = \vec{0}$, Permutation $P^2 = 1$, $m_{ij} = (M\vec{e}^i)_j$

Unitär $U^\dagger U = 1$, Hermitsch $H^\dagger = H$, Speziell $\det A = 1$, Projektion $P^2 = P$

Nilpotenz $N^2 = 0$, Basistransformation $(U\vec{e}^i)_j$, Tensoren $v'_{i_1\ldots i_n} = U^{-1}_{j_1i_1}\ldots U^{-1}_{j_ni_1}v_{j_1\ldots j_n}$

$x_i = \det A_{i\to b}/\det A$, $\vec{c}_i = \vec{a}_i - \sum_{j=1}^{i-1}\langle b_j|a_i\rangle\vec{b}_j$, $m_{ij} = v_iw_j - v_jw_i$, $\Lambda^T g\Lambda = g$

$M(\vec{a}+\vec{b}) = M\vec{a} + M\vec{b}$, $M(\alpha\vec{a}) = \alpha M\vec{a}$, $M\vec{0} = \vec{0}$, Endo: $V = V$, Auto: Endo+Iso

injektiv: $\vec{v} \neq \vec{w} \Rightarrow \vec{v}' \neq \vec{w}'$, Iso $\exists M^{-1}$

Lösungen:

Aufgabe K1

a) Ein allgemeiner Vektor hat die Form $a\sin x + b\cos x$ mit a und b komplex. Das definiert die Vektoraddition und skalare Multiplikation. Der Raum ist darunter abgeschlossen. Da es sich um gewöhnliche Zahlen und Funktionen handelt folgen die notwendigen Eigenschaften aus den Eigenschaften der komplexen bzw. reellen Zahlen.

b) Beides sind lineare Operatoren. Darüberhinaus gilt

$$\begin{aligned}\sin x &= -\frac{d\cos x}{dx} = \int dx \cos x\\ \cos x &= \frac{d\sin x}{dx} = -\int dx \sin x,\end{aligned}$$

und damit sind beide Operationen Endomorphismen. Sie sind damit auch offenbar invertierbar, damit Isomorphismen, und insgesamt Automorphismen.

c) Mit der Abbildung von $a\sin x + b\cos x$ auf $(a,b)^T$ folgt

$$\begin{aligned}D\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}\\ I\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix},\end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt.

d) Da $D = -I$ ist, reicht es nur D zu betrachten. Die Eigenwerte sind dann für beide Matrizen $\pm i$, jeweils mit algebraischer Vielfachheit 1. Die Eigenvektoren sind

$$\vec{v}_i = \begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_{-i} = \begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix},$$

mit jeweils geometrischer Vielfachheit 1. Damit sind beide Matrizden diagonalisierbar.

e) Die Determinante ist für beide Fälle 1 während die Spur in beiden Fällen Null ist.

f) Da sie jeweils gegenseitig das Inverse sind und gleichzeitig das transponierte sowie Determinante 1 haben, sind sie speziell unitär. Es ist zu beachten, dass jede orthogonale Matrix (was beide sind) auch automatisch unitär ist. Beide Matrizen sind jedoch nicht hermitisch (oder symmetrisch).

Aufgabe K2

a) $\vec{v}^\dagger\vec{w} = -1 - i$

b) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & e\end{pmatrix}$

c) $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix}1+i\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix}i-1\\-2i\end{pmatrix}$

d) $M\vec{v} = \begin{pmatrix}-\pi\\-i\end{pmatrix}$, $\vec{v}^\dagger M\vec{v} = 1 + i\pi$, $M\vec{w} = \begin{pmatrix}i\pi\\i\end{pmatrix}$, $\vec{v}^\dagger M\vec{w} = \pi - 1$