Lineare Algebra

Dr. Markus Holzmann

Schriftliche Prüfung

31. Jänner 2025

Name: ______________________________ Matr.-Nr.: ____________________

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**. Bitte beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen! Es können maximal 16 Punkte erreicht werden. Die Prüfung gilt mit 8 Punkten als bestanden.

Bitte dieses Feld NICHT ausfüllen:

1	2	3	4	5	$\sum$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Betrachten Sie für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & a \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von a ist A invertierbar? Berechnen Sie in diesen Fällen die Inverse von A.

(b) Lösen Sie im Fall $a = -5$ die linearen Gleichungssysteme $A\mathbf{x}_j = \mathbf{b}_j$, $j \in \{1, 2, 3\}$, für die rechten Seiten

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume.

(b) Ist B diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Überprüfen Sie, ob die Funktionen

$$\mathbf{p}_1(x) = x^3 + x^2, \quad \mathbf{p}_2(x) = 1 - 3x \quad \text{und} \quad \mathbf{p}_3(x) = -2x^2 - 2x + 1$$

im Vektorraum $P_3(\mathbb{R})$ der Polynome mit Maximalgrad 3 linear unabhängig sind.

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}.$$

Bestimmen Sie den Kern $\ker(T)$ und den Bildbereich $\operatorname{ran}(T)$ von T und geben Sie jeweils eine Basis dieser Räume an. Ist T injektiv?

Aufgabe 5: (3 Punkte)

(a) Geben Sie die Definition an, dass U ein Untervektorraum eines Vektorraums V ist.

(b) Handelt es sich bei der Menge

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : x_1 = -x_3^3 \right\}$$

um einen Untervektorraum des $\mathbb{C}^3$?