Lineare Algebra

Dr. Markus Holzmann

Schriftliche Prüfung

1. Februar 2021

Name: ____________________ Matr.-Nr.: ____________________

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**. Bitte beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen! Es können maximal 16 Punkte erreicht werden. Die Prüfung gilt mit 8 Punkten als bestanden.

Bitte dieses Feld NICHT ausfüllen:

1	2	3	4	5	$\sum$

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: (2 Punkte)
Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ a & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei a eine beliebige komplexe Zahl ist. Für welche Werte von a ist die Matrix B invertierbar?

Aufgabe 2: (3 Punkte)
Gegeben sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(b) Bestimmen Sie von jedem der Eigenwerte den zugehörigen Eigenraum.

(c) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Aufgabe 3: (5 Punkte)
Für welche Werte des Koeffizienten α hat das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ \alpha & 0 & -2 \\ 2 & -1 & \alpha - 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) keine Lösung;

(b) eine eindeutige Lösung;

(c) unendlich viele Lösungen?

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Gegeben seien die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$.

(a) Überprüfen Sie, ob es sich bei $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ um ein *Orthogonalsystem handelt.*

(b) Sind die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ linear unabhängig?

(c) Finden Sie ein *Orthonormalsystem* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, das den Raum $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ aufspannt.

(d) Berechnen Sie die orthogonale Projektion des Vektors

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

auf den Untervektorraum $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 5: (2 Punkte)
Es seien V und W zwei Vektorräume und $T : V \to W$ ein linearer Operator. Zeigen Sie, dass der Bildbereich $\text{ran}(T)$ von T ein Untervektorraum von W ist.