Name: Unterschrift: Matrikelnr.:

PHY.C20 UE Lin. Algebra — 28. Januar 2017

2. Klausur

Aufgabe:	1	2	3	4		
Punkte:	10	10	10	10		
					=	Punkte

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten genau zu begründen!

1. Sei $F : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine lineare Abbildung mit der Abbildungsvorschrift

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+b & -3d \\ 2a & c+b \end{pmatrix}.$$

   (a) Wie lautet $\mathrm{Ker}(F)$?

   (b) Finden Sie eine Basis von $\mathrm{Ker}(F)$.

   (c) Wie groß sind die Dimensionen $\dim \mathrm{Im}(F)$ und $\dim \mathrm{Ker}(F)$?

   (d) **[1 Bonuspunkt]** Wie lautet $\mathrm{Im}(F)$?

   (e) **[1 Bonuspunkt]** Finden Sie eine Basis von $\mathrm{Im}(F)$.

2. Sei $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ ein Homomorphismus mit den Abbildungsvorschriften

$$F(1,1,0,0,0) = (2,1,1),$$
$$F(0,1,1,0,0) = (1,2,1),$$
$$F(1,0,1,0,0) = (1,1,2).$$

   (a) Berechnen Sie $F(1,0,0,0,0)$.

   (b) Sind die Angaben ausreichend, um die Dimensionen $\dim \mathrm{Im}(F)$ und $\dim \mathrm{Ker}(F)$ zu bestimmen? Begründung!

   (c) Ist der Homomorphismus F durch die gegebenen Angaben eindeutig definiert?

   (d) Bleibt F linear, wenn zusätzlich die Abbildungsvorschrift

$$F(0,1,0,0,0) = (1,1,0)$$

   gegeben ist?

3. Berechne Sie die Inverse Matrix von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

und verifizieren Sie anschließend, dass Ihre Lösung die inverse Matrix von $\mathbf{A}$ ist.