Prof. Dr. A. Maas
Institut für Physik

N A W I
G R A Z

Klausur zu den Übungen der linearem Algebra

WS 2015/16

01. Februar 2016

Name: ________________________________

Matrikelnummer: ________________________ ID Nummer: ____________

Notieren Sie auf jeder Seite Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die ID Nummer. Zum bestehen der Klausur sind maximal 50 Punkte erforderlich. Begründen Sie alle Antworten! Lediglich ein Ergebnis führt zu Punktabzug. Die Punkte aus den Übungen werden als Bonus angerechnet.

K3	K4a	K4b	K5a	K5b	K5c	K5d	Bonus	$\sum$	Note

Aufgabe K3: Lineare Gleichungssysteme (30 Punkte)

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 1 \\ 14x + y - z &= 2 \\ 3x + 3y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe K4: Basen (15+15=30 Punkte)

a) Verwenden Sie das Gram-Schmidt Verfahren um aus dem Vektoren

$$b = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ zu konstruieren, beginnend mit dem ersten Vektor.

b) Mit welcher Basistransformation können Sie von der kanonischen Basis auf die so erzeugt Basis transformieren? Verifizieren Sie, dass die zugehörige Matrix tatsächlich speziell orthogonal ist!

Bitte wenden.

Aufgabe K5: Matrixgruppen (10+5+15+10=40 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} x & x \\ -x & -x \end{pmatrix}$$

eine Gruppe unter der Matrixaddition bilden.

b) Zeigen Sie, dass die Matrizen nilpotent sind.

c) Was sind ihre Eigenwerte und Eigenvektoren, sowie die zugehörigen algebraischen und geometrischen Vielfacheiten als Funktion von x? Sind diese Matrizen diagonalisierbar?

d) Was sind Kern und Bild dieser Matrizen als Funktion von x?

Formelsammlung

$A \circ B \in G$, $\langle v|w\rangle = v_i^* w_i$, $-A \in G$, $\vec{v}+\vec{w} \in V$, $a\vec{v} \in V$, bijektiv: injektiv+surjektiv

$\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3$, $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$, $(ab)\vec{v} = a(b\vec{v})$, $a(\vec{v} + \vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}$

$(a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$, $0\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{v} = b_i\vec{e}_i$: $\vec{e}_i$ Basis, $(\vec{c})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$, $|\vec{x}| > 0$, $|\alpha\vec{v}| = |\alpha||\vec{v}|$

$|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$, $\langle\vec{v}|\vec{w}\rangle = \alpha$, $\langle\vec{v}|\vec{w}\rangle = \langle\vec{w}|\vec{v}\rangle^*$, $\langle\vec{v}|a\vec{w}\rangle = a\langle\vec{v}|\vec{w}\rangle$, $\vec{x}^T M\vec{x} + \vec{b}^T\vec{x} + r = 0$

$\langle\vec{v}|\vec{u}+\vec{w}\rangle = \langle\vec{v}|\vec{u}\rangle + \langle\vec{v}|\vec{w}\rangle$, $\langle\vec{v}|\vec{v}\rangle \geq 0$, $\langle\vec{v}|\vec{v}\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$, $\langle v|w\rangle = g_{ij} v_i^* w_j$, $0 \in G$

$(M\vec{v})_i = M_{ij} v_j$, $(w^T M)_j = w_i M_{ij}$, $\langle w|M|v\rangle = w_i^* M_{ij} v_j$, surjektiv $\forall \vec{v}' \exists \vec{v}$

$(M^\dagger)_{ij} = M_{ji}^*$, $(M+N)_{ij} = M_{ij} + N_{ij}$, $(NM)_{ij} = N_{ik} M_{kj}$, $AB \neq BA$, $\mathrm{tr}M = m_{ii}$

$\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}BA$, $\mathrm{tr}A^\dagger = (\mathrm{tr}A)^*$, $\mathrm{tr}kA = kA_{ii} = k\mathrm{tr}A$, $\det A = \frac{1}{n!}\sum_{i_k}\sum_{j_m} \epsilon_{i_1\ldots i_n}\epsilon_{j_1\ldots j_n}\Pi_l a_{i_l j_l}$

$\det A^\dagger = (\det A)^*$, $\det kA = k^n \det A$, $\det(AB) = \det(BA)$, $1 = \det AA^{-1}$

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$, $A' = SAS^{-1}$, $\det(A - \lambda 1) = 0$, $\gamma_i \leq \mu_i$, $\sum_{i=1}^m \gamma_i = n' \leq n$

Bild $\{A\vec{v}\}$, Kern $\{\vec{v}|A\vec{v} = \vec{0}\}$, Kohomologie: Bild/Kern, $(\vec{f}_t)_i = (d\vec{f}(t)/dt)_i$

Diagonaliserbar$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^m \gamma_i = n$, $(M - \lambda 1)^n \vec{s} = \vec{0}$, Permutation $P^2 = 1$, $m_{ij} = (M\vec{e}^i)_j$

Unitär $U^\dagger U = 1$, Hermitsch $H^\dagger = H$, Speziell $\det A = 1$, Projektion $P^2 = P$

Nilpotenz $N^2 = 0$, Basistransformation $(U\vec{e}^i)_j$, Tensoren $v'_{i_1\ldots i_n} = U^{-1}_{j_1 i_1}\ldots U^{-1}_{j_n i_1} v_{j_1\ldots j_n}$

$x_i = \det A_{i\to b}/\det A$, $\vec{c}_i = \vec{a}_i - \sum_{j=1}^{i-1}\langle b_j|a_i\rangle\vec{b}_j$, $m_{ij} = v_i w_j - v_j w_i$, $\Lambda^T g\Lambda = g$

$M(\vec{a}+\vec{b}) = M\vec{a} + M\vec{b}$, $M(\alpha\vec{a}) = \alpha M\vec{a}$, $M\vec{0} = \vec{0}$, Endo: $V = V$, Auto: Endo+Iso

injektiv: $\vec{v} \neq \vec{w} \Rightarrow \vec{v}' \neq \vec{w}'$, Iso $\exists M^{-1}$

Lösungen:

Aufgabe K3

Die schnellste Lösung ergibt sich mittels Cramers Regel. Umschreiben in Matrixform mit der Matrix M liefert $\det M = -156$. Weiterhin folgt dann

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{\det M_{1\to b}}{\det M} = \tfrac{-18}{-156} = \frac{3}{26} \\ y &= \tfrac{\det M_{2\to b}}{\det M} = \tfrac{-21}{-156} = \frac{7}{52} \\ z &= \tfrac{\det M_{3\to b}}{\det M} = \tfrac{39}{-156} = -\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

wobei die Notation $M_{i\to b}$ bedeutet, dass die $i$te Spalte durch den Vektor auf der rechten Seite ersetzt wurde.

Aufgabe K4: Basen

a) Der erste Vektor muss nur normiert werden, und hat die Länge $\sqrt{2}$. für den zweiten neuen Basisvektor ergibt sich unnormiert

$$\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

was nach Normierung dem Vektor $(1,1)^T/\sqrt{2}$ entspricht.

b) Die Bilder der kanonischen Einheitsvektoren stehen dann in den Spalten, mithin

$$O = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Direktes ausrechnen zeigt $O^T O = 1$, womit die Matrix orthogonal ist. Ihre Determinante ist 1, und damit ist sie auch speziell orthogonal.

Aufgabe K5: Matrixgruppen

a) Zunächst ist die Summe zweier solcher Matrizen, z. B. mit Parametern x_1 und x_2, wieder eine solche Matrix, jetzt mit dem Parameter $x_1 + x_2$. Damit ist die Gruppe abgeschlossen. Die Nullmatrix ist sicher das neutrale Element und die Matrix mit $-x$ is das Inverse zu der Matrix mit x. Damit sind alle Gruppenaxiome erfüllt.

b) Die Nilpotenz folgt durch direktes ausrechnen.

c) Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 = 0$, und damit ist der einzige Eigenwert 0 mit algebraischer Vielfacheit 2. Es gibt dazu nur einen Eigenvektor,

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und damit hat die Matrix die geometrische Vielfachheit 1 und ist nicht diagonalisierbar.

d) Das Bild ist für einen Vektor $(a,b)^T$ ist $-(a+b)x\vec{v}_0$, und damit, wie aufgrund der verschwindenden Determinante erwartet, nicht zwei- sondern nur eindimensional. Der Kern ist das orthogonal Komplement, gegeben durch $(a,-a)^T$, und entsprechend auch eindimensional.