[redacted]

*Bitte mit BLOCKbuchstaben ausfüllen*

Nachname: ........................ Vorname: ........................

Matrikelnummer: ............................

---

21.11.2024

## Numerisches Rechnen und Lineare Algebra, WS 2024/25

## 1. Klausur - Gruppe C

- Lösungszeit 80 Minuten
- **Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an.**]
- Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem **Namen und Matrikelnummer**.
- Bei allen Aufgaben sind die einzelnen Rechenschritte, Zwischenergebnisse und Begründungen anzugeben.

[redacted]

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|
| max. Punkte | 6 | 7 | 9 | | 22 |
| Punkte | | | | | |

**Aufgabe 1.** (6 Punkte) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a & 4 \\ a & 0 & 3 \\ 5 & 1 & c \end{pmatrix}$$

mit reellen Konstanten $a$ und $c$.

(a) Bestimmen Sie $\det(A)$.

(b) Geben Sie alle Paare $(a, c) \in \mathbb{R}^2$ an, so dass $A$ invertierbar ist.

(c) Geben Sie für $a = 1, c = 5$ die inverse Matrix $A^{-1}$ an.

[redacted]

[redacted]

**Aufgabe 2.** (7 Punkte) Es sei $\mathbb{P}_n$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$, mit Koef- $\Rightarrow$ linear
fizienten in $\mathbb{R}$ und einer reellen Variablen $x$, mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation von Polynomen. Ein solches Polynom $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ kann in der Form $f(x) = \sum_{i=0}^n a_ix^i$ geschrieben werden. Sei $F : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_{n-1}$ eine Abbildung definiert durch

$$F(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = \sum_{i=1}^{n} 3ia_ix^{i-1}$$

(a) Zeigen Sie, dass $F$ eine lineare Abbildung ist. [redacted]

(b) Ist $F$ injektiv? (Mit Begründung). [redacted]

(c) Es sei $G = F \circ F$. Berechnen Sie $G(\sum_{i=0}^n a_ix^i)$. Ist $G$ eine lineare Abbildung? (kurze Begründung). [redacted]

(d) Geben Sie jeweils eine Basis für Kern($G$) und Bild($G$) an. Welche Dimension haben $\mathbb{P}_n$, Kern($G$) und Bild($G$)? [redacted]

**Aufgabe 3.** (9 Punkte)

Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ [redacted] $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ [redacted]

(a) Gibt es Punkte $P$, für die $f(P) = P$ gilt? (Wenn ja, geben Sie mindestens einen solchen Punkt an; wenn nein, warum nicht?)

(b) Beschreiben Sie die geometrische Bedeutung der Abbildung so gut wie möglich. (Zeichnen Sie dies auch geeignet. Denken Sie z.B. an Drehung, Streckung, Spiegelung, Verschiebung, Scherung oder Kombination davon.)

(c) Berechnen Sie $G(\vec{x}) = f(f(f(\vec{x})))$.

(d) Können Sie eine ungefähre geometrische Interpretation von $G$ angeben?

(e) Es sei $\Delta$ ein beliebiges Dreieck der Ebene mit Fläche $F$. Die Eckpunkte seien $P_1, P_2, P_3$. Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten $f(P_1), f(P_2), f(P_3)$ ?

Hinweis:
1) Die letzte Teilaufgabe von Aufgabe 3 kann man elegant lösen, wenn man die geometrische Bedeutung der Abbildung $f$ verwendet. Rechnungen sind auch möglich, aber zeitaufwändiger.
2) $\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

[redacted]