Petr Siegl

Differential- und Integralrechnung

Schriftliche Prüfung

1.2.2024

Name:

Matr.-Nr.:

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**. Bitte beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen! Es können maximal 16 Punkte erreicht werden. Die Prüfung gilt mit 8 Punkten als bestanden.

Bitte dieses Feld NICHT ausfüllen:

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Viel Erfolg!

Es werden der gesamte Lösungsweg (außer in Aufgabe 1) und das Ergebnis bewertet.

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen für eine reelle Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ wahr oder im Allgemeinen falsch sind. Füllen Sie die Kästchen entweder mit **"wahr"** oder **"falsch"** aus. Es ist keine Argumentation Ihrer Antwort notwendig. Für jede richtige Antwort erhalten Sie 1 Punkt, für jede falsche Antwort wird 1 Punkt abgezogen. Gar nicht oder ungültig beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet. Die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe liegt immer zwischen 0 und 3 Punkten.

	(w) oder (f)
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ stellt für jedes $0 < r < R$ eine auf $(-r, r)$ beschränkte Funktion dar.	
Die Potenzreihe konvergiert weder für $x = R$ noch für $x = -R$.	
Auf $(-R, R)$ gilt $\frac{d}{dx} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.	

Aufgabe 2: (2 Punkte)

Formulieren Sie den ersten und zweiten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Geben Sie alle nötigen Voraussetzungen an!

Aufgabe 3: (3 Punkte)

i) Formulieren Sie das Leibnizkriterium mit allen Voraussetzungen.

ii) Entscheiden Sie, ob die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

konvergiert.

Bitte wenden!

Aufgabe 4:

(3 Punkte)

Sei $f : X \to Y$ eine gegebene Funktion.

i) Wie sind Injektivität, Surjektivität und Bijektivität definiert?

ii) Überprüfen Sie die Funktion $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = x\ln(x)$, auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

Aufgabe 5:

(2 Punkte)

Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right).$$

Aufgabe 6:

(3 Punkte)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gegebene Zahlen und die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} e^x + a, & x \geq 0 \\ bx^2 + cx + d, & x < 0. \end{cases}$$

i) Wie müssen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit f eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion ist?

ii) Für welche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist f differenzierbar?

iii) Unter welchen Voraussetzungen (zusätzlich zu jenen in Punkt i) und ii)) ist f auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton steigend?