Differential- und Integralrechnung
NAWI Graz

WS 2017/18
29.06.2018

VO Prüfung — A

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten genau zu begründen!
Jede Aufgabe ist 6 Punkte wert.

Aufgabe 1 Untersuchen Sie die Konvergenz der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}}{\sqrt{n}} (x+e)^{2n} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Anleitung: *Bestimmen Sie Konvergenzradius und -intervall (Skizze). Wo ist die Reihe absolut konvergent? Wo divergent?*

1 Bonuspunkte: Konvergenz am Rand und gleichmässige Konvergenz.

Aufgabe 2 **(a)[3 P.]** Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, welche die folgenden beiden Bedingungen erfüllen und fertigen Sie eine Skizze an:

$$|z+i+1| \geq 1 \qquad \text{und} \qquad |z+1| - \operatorname{Re} z \geq 2.$$

1 Bonuspunkt: Es soll weiters nur jene $z \in \mathbb{C}$ erlaubt sein, in denen $\operatorname{Log}(z^2-1)$ analytisch ist.

(b)[3 P.] Bestimmen Sie alle 4. Wurzeln von $\sqrt{3}$

$$w = -8 + 8\sqrt{2}\,i;$$

d.h., finden Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4 - w = 0$. Skizze.

1 Bonuspunkt: Wieviele Lösungen hat $z^{\sqrt{2}} - w = 0$? Erklärung! Skizze.

Aufgabe 3 Bestimmen und Klassifizieren Sie die Extrema der folgenden Funktion

$$f(x,y) := 4 - x^2 - y^2, \qquad \text{wobei } (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{9}{4}. \quad \leftarrow \text{Skizze}$$

im Inneren und am Rand des Definitionsgebietes von f.

Anleitung: *Maximaler Definitionsbereich von f? Wo ist f stetig bzw. differenzierbar? Skizze des Definitionsgebietes mit kritischen Punkten. Benützen Sie den Satz von Schwarz.*

1 Bonuspunkt: Wie läßt sich die Theorie konvexer Funktionen hier anwenden — Folgerungen.

bzw. Schwerpunkt $\iint_B r \rho \, dA$

Aufgabe 4 Berechnen Sie das Flächenträgheitsmoment bzgl. der x-Achse von

$$B := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq e^{-x}, x \geq 0\right\} \qquad * \iint_B r^2 \rho \, dA$$

mit der Massenbelegung $\rho = \rho(x,y) := x$.

Anleitung: *Existenz des Integrals? Skizze vom Bereich. Flächenelement $\mathrm{d}A$ in geeigneten Koordinaten? Wechsel von Doppelintegral auf iteriertes Integral (Satz von Fubini).*

Name: **Matr.-Nr:** **Unterschrift:**

VO-1

Konvergenz v. P.R.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}}{\sqrt{n}}}_{a_{2n}} (x+e)^{2n} \qquad (0)$$

in $\mathbb{R}$. a_{2n} (posit., wie zu sehen) $a_{2n+1} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

4+2

- **Konvergenzradius**

Lt. VO (nach Cauchy-Hadamard)

$$\sqrt[2n]{a_{2n}} =\colon= \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n^2}{2n}}}{\sqrt[2n]{\sqrt{n}}} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt[4]{\sqrt[n]{n}}} \underset{n\to\infty}{\overset{*}{\longrightarrow}} \frac{e}{1} =: q$$

D.h., $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a_{2n}}$

$a_n \geq 0$ Def. von lim sup. für ggf. Folge

$* \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n \overset{VO}{=} e^2$;

d.h. $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \overset{\sqrt{\cdot}\text{ stetig auf } [0,\infty)}{=} \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = \sqrt{e^2} = e$

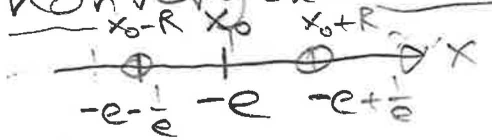
- $\sqrt[n]{n} \overset{VO}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} 1$ & Stetigkeit von $\sqrt[4]{\cdot}$ in $[0,\infty)$
- GW-Sätze (Quot.-Regel)

also

$$\underline{\underline{R = \frac{1}{q} = \frac{1}{e}}}$$

(da $\sqrt[2n+1]{a_n} = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und daher $\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_m} = e$)

- **Konvergenz-Intervall**



$$I := \left(-e-\frac{1}{e}, -e+\frac{1}{e}\right)$$

Nach VO:

- P.R. konv. abs. für $|x-x_0| < R$; d.h., $x \in \left(-e-\frac{1}{e}, -e+\frac{1}{e}\right)$
- P.R. div. für $|x-x_0| > R$; d.h., $x \in \left(-\infty, -e-\frac{1}{e}\right) \cup \left(-e+\frac{1}{e}, \infty\right)$
- am Rand $x = -e \pm \frac{1}{e}$ gesondert zu untersuchen

Bonus

1

- **Randkonvergenz**

$x = x_0 \pm R$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\pm\frac{1}{e}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overbrace{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}\left(\frac{1}{e}\right)^{2n}}^{b_n}}{\sqrt{n}}$ (*)

Bem: $b_n = \exp(\ln(b_n))$, wobei

$\ln(b_n) \underset{\text{R.R.}}{=} n^2 \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + 2n \underbrace{\ln\left(\frac{1}{e}\right)}_{-1} = n^2 \underbrace{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}_{\text{n. VO. } \ln(1+x) = \dots\ \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{8}{3}\frac{1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)} - 2n$

$= -2 + \frac{8}{3}\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$;

d.h., $b_n = e^{-2 + \frac{8}{3}\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \geq \frac{1}{e^2}$ f.f.a. n (tatsächlich: $\forall n \in \mathbb{N}$)

Somit $\frac{b_n}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{e^2}\frac{1}{\sqrt{n}}$ f.f.a. n

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ div. n. VO., ist $\frac{1}{e^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ div. Minorante von (*);

(**) d.h., nach Minoranten krit. ist Reihe (*) divergent und daher (0) div. in den Randpunkten von I

- **glm. Konv.**

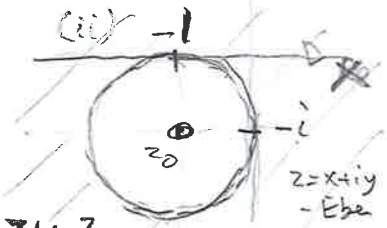
P.R. (*) konv. n. VO. glm. auf jedem kompakten Teil von I.

VO-2

(a) $z \in \mathbb{C}$ mit

3 $|z+i+1| \geq 1$ und $|z+1| - \operatorname{Re} z \geq 2$

(i)



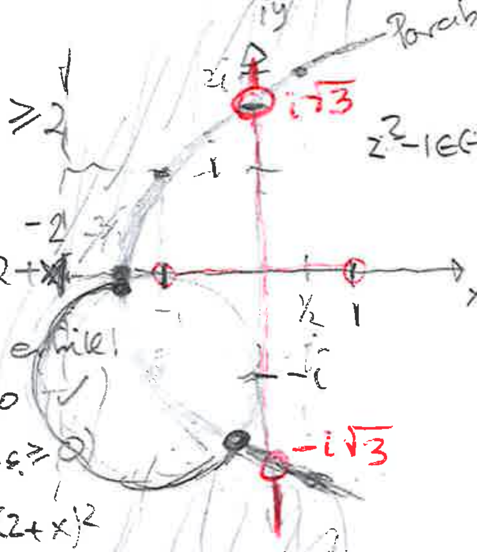
(i): $|z+i+1| = |z-\underbrace{(-1-i)}_{z_0}| \overset{!}{\geq} 1$

Interpr.: Abstand von z ~~zu~~ z_0 ist mind. 1; d.h. z liegt auf bzw. außerhalb eines Kreises mit MP z_0 und Radius 1

(ii) $|z+1| - \operatorname{Re} z \geq 2$

Setze: $z = x+iy$

$|(x+1)+iy| \geq 2+x$



- für $x \leq -2$ stets erfüllt (lhs ≥ 0, rhs ≤ 0)
- sei $x \geq -2$ (rhs ≥ 0)

$|(x+1)+iy|^2 \geq (2+x)^2$

$(x+1)^2 + y^2 \geq (2+x)^2$

$y^2 \geq (2+x)^2 - (x+1)^2 = 1 \cdot (2x+3)$ $\quad a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

$y^2 \geq 2x+3$

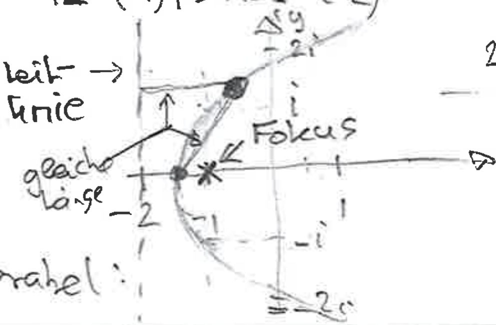
Rand: $y^2 = 2x+3$ bzw. $x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}y^2$

4 **Bonus**: $\operatorname{Log}(z^2-1)$ analyt. für $z^2-1 \notin (-\infty, 0]$ (cf. VO)

$z^2-1 \in (-\infty,0] \Leftrightarrow z = x$ mit $|x| \leq 1$ oder $z = iy$ mit $y \in \mathbb{R}$

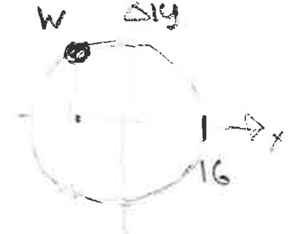
(i) & (ii) zusammen & Bonus

$|z-(-1)| \geq \operatorname{Re} z - (-2)$



(b) alle 4. Wurzeln von

3 $w = -8+8\sqrt{3}i$
$= 16\,(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$
$16 = 2^4$, $(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = e^{i\frac{2\pi}{3}}$



d.h., alle Lsgen von

$z^4 = w \quad | \sqrt[4]{\cdot}$

(*) Mehrwertigkeit von $\sqrt[4]{\cdot}$

$z = z_k$ mit $z_k \overset{(*)}{=} \sqrt[4]{2^4}\, e^{i\frac{1}{4}(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k)}$

$= 2\, e^{i\frac{\pi}{6} + i\frac{\pi}{2}\cdot k}$

$= 2\, e^{i\frac{\pi}{6}}\, \underline{e^{i\frac{\pi}{2}\cdot k}}$, $k \in \mathbb{Z}$

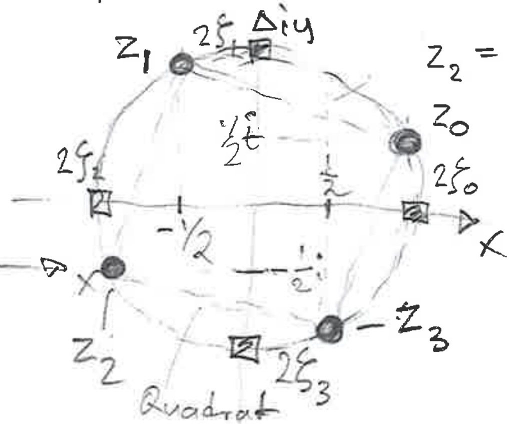
Funktionalsglg. $e^{z+w} = e^z e^w$, $z, w \in \mathbb{C}$

"4-ten Einheitswurzeln" ζ_k, $k \in \mathbb{Z}$?

Wegen rationaler Wurzel $(m=4)$, $k = 0,1,2,3$ und

$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})) = \sqrt{3} + i$

$z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})) = -1 + i\sqrt{3}$



$z_2 = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}} = \dots = -\sqrt{3} - i$

$z_3 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 1 - i\sqrt{3}$

add VO2 Bonus

+1

$$z^{\sqrt{2}} - w \overset{!}{=} 0 \qquad e^{\ln\varrho}$$

$$z^{\sqrt{2}} \overset{!}{=} w = \underbrace{\varrho}_{\sim} e^{i\varphi \cancel{\pm 2\pi k i}}$$

$$w = \underbrace{\overbrace{16}^{2^4}}_{\varrho} \cdot e^{i \overbrace{\frac{2\pi}{3}}^{\varphi}}$$

Def. der allg. Potenz $\longrightarrow \| \qquad e^{\sqrt{2}\log \overset{re^{i\varphi}}{z}} = e^{\sqrt{2}(\ln r + i\varphi + 2\pi i \ell)}$

Gleichsetzen zweier Exponential=Ausdrücke $\longrightarrow$ Glg.s-System (im Komplexen)

im Reellen

$$e^{\sqrt{2}\ln r} = e^{\ln\varrho} \Leftrightarrow \sqrt{2}\ln r = \ln\varrho, \quad r = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\varrho}$$

$$e^{i(\sqrt{2}\varphi + 2\pi\sqrt{2}\ell)} \overset{!}{=} e^{i\varphi} \Leftrightarrow \sqrt{2}\varphi + 2\pi\sqrt{2}\ell \overset{!}{=} \varphi + 2\pi k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

im Komplexen

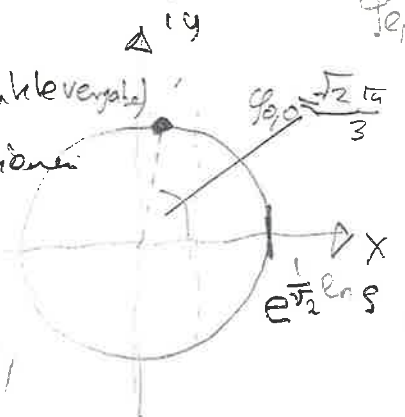
$$\varphi_{\ell,k} = \underbrace{\frac{\varphi + 2\pi k}{\sqrt{2}}}_{} - 2\pi\ell$$

$$\underbrace{\frac{\varphi}{\sqrt{2}}}_{\frac{\sqrt{2}\pi}{3}} + \sqrt{2}\pi k = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}\overbrace{(1+3k)}^{\text{ganzzahliger Faktor}}$$

irrational

Zusatz (nicht relevant für Punktevergabe)

- irrationale ~~Teil~~ Rotationen (Winkel irrationale Vielfache von π)
- Aus Zahlentheorie folgt, die Lsg.s-Punkte liegen dicht auf dem Kreis $|z| = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\varrho}$



$z = x + iy$

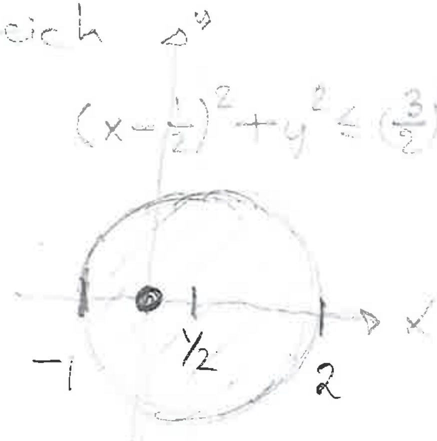
$$e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\varrho} = e^{2\cdot\sqrt{2}\cdot\ln 2}$$

VO-3 4+2

$f(x,y) := 4 - x^2 - y^2$

in abg. und beschr. (= kompakten – SATZ) Bereich

$B: \quad (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 \leq (\frac{3}{2})^2$



(Kreisscheibe ....).

- **Existenz** (absoluter ~~Min~~Min./Max.)

f ist Polynom (vom Grad 2) und damit auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig und damit insb. auf der kompakten Kreisscheibe B.

Nach dem Min/Max Satz nimmt f auf B Min./Max. an; d.h.

$m := \min_{\underline{x} \in B} f(\underline{x}) = f(\underline{x}^*)$

und

$M := \max_{\underline{x} \in B} f(\underline{x}) = f(\underline{x}^{**})$

für $\underline{x}^*, \underline{x}^{**} \in B$, sodaß

$m \leq f(\underline{x}) \leq M$ für alle $\underline{x} \in B$

($\underline{x}^*$ bzw. $\underline{x}^{**}$ können auch auf Rand von B liegen)

- **innere Extrema**

f ist als Polynom in $\mathbb{R}^2$ beliebig oft stetig partiell differenzierbar, nach Differentiationskrit. ist f diff.bar in $\mathbb{R}^2$ und insb. im Inneren von B.

Nach Satz von Fermat (für 2 Dimensionen) gilt in einem lokalen Extremum notwendig

$\nabla f \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_x = -2x \stackrel{!}{=} 0 \\ f_y = -2y \stackrel{!}{=} 0 \end{cases}$

(notw. Bdg.)

Dieses (entkoppelte) lineare Glg.-Syst. hat die eindeutige Lsg.

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Der einzige innere krit. Pkt. ist daher der Ursprung $P(0,0)$ (im Inneren von B),

Da f mind. 2mal stetig im Inneren von B partiell diff.b. kann die Klassifizierung über die Hesse-Matrix in P,

$H|_P = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}\Big|_P = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\Big|_P = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

erfolgen.

$f_{xx} = -2$, $f_{yy} = -2$, $f_{xy} \stackrel{=}{\scriptstyle P} f_{yx} = 0$ S.v. Schwarz

Die EW.e von $H|_P$ sind -2 (2-fach); d.h., H ist strikt neg. definit und damit hat f in P ein lok. Max.

(Bonus) Da H strikt neg. definit im Inneren von B ist, hat f im Ursprung P ein Globales Max (bzgl. Inneres von B), da $-f$ ~~dort~~ konvex ist (Satz).

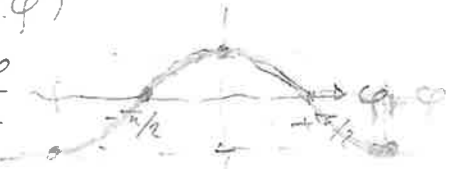
Daher
$M = f(\underline{0}) = 4 > f(\underline{x})$ für $\underline{x} \in B \setminus \{\underline{0}\}$

Randextrema

Rand ∂B von B durch
$$x = \frac{1}{2} + r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \qquad -\pi < \varphi \leq \pi$$
parametrisierbar. $(r = \frac{3}{2})$

Da f auf ∂B (kompakter Kreis) stetig, nimmt eingeschränkt auf ∂B f dort nach dem Min/Max Satz Min. und Max. an.

$$g(\varphi) := f\left(\tfrac{1}{2} + r\cos\varphi,\ r\sin\varphi\right)$$
$$= 4 - \left(\tfrac{1}{2} + r\cos\varphi\right)^2 - (r\sin\varphi)^2$$
$$= 4 - \tfrac{1}{4} - r\cos\varphi - r^2 \qquad r^2 = \tfrac{9}{4}$$
$$= \tfrac{6}{4} - \tfrac{3}{2}\cos\varphi \qquad \cos^2\tfrac{\varphi}{2} - \sin^2\tfrac{\varphi}{2}$$
$$= \tfrac{3}{2}(1 - \cos\varphi)$$
$$= 3\cos^2\tfrac{\varphi}{2}$$



Bem.: g ist C^∞-Fkt. in $(-\pi, \pi)$

Notw. nach Satz v. Fermat
$$g'(\varphi) = \tfrac{3}{2}\sin\varphi \overset{!}{=} 0 \quad \text{in } (-\pi, \pi)$$
genau dann, wenn
$\varphi = 0$.

Da
$$g''(0) = \tfrac{3}{2}\cos\vartheta\Big|_{\vartheta=0} = \tfrac{3}{2} > 0$$
hat g nach dem hinreichenden Krit. in $\vartheta = 0$ ein lok. Min.

D.h., $f\big|_{\partial B}$ (f eingeschr. auf Rand ∂B) hat in $Q(2,0)$ ein lok. Min.

Weitere krit. Stelle sind der Rand von $(-\pi, \pi]$, d.h. $\varphi_\pm = \pm\pi$.

Wegen $g(\varphi_\pm) = 3 > g(\varphi)$ für $\varphi \in (-\pi, -\pi+\varepsilon)$ oder $\varphi \in (\pi - \varepsilon, \pi]$ ($\varepsilon > 0$ hinreichend klein) hat g ein lok. Max. in $\varphi = \pi$, jedoch wird am linken Rand dieses Max. nicht angenommen.

Folgerung: $f|_{\partial B}$ hat lokales Max. in $R(-1,0)$.

ABER: f hat in R bzgl. ganz B kein Extremum (entlang des Randes fällt f ab und entlang einer Geraden zum Ursprung zu).

UND: f hat in $Q(-2,0)$ auch lokales Min. welches ein globales auf B ist (z.B. über Niveaukurven argumentierbar)

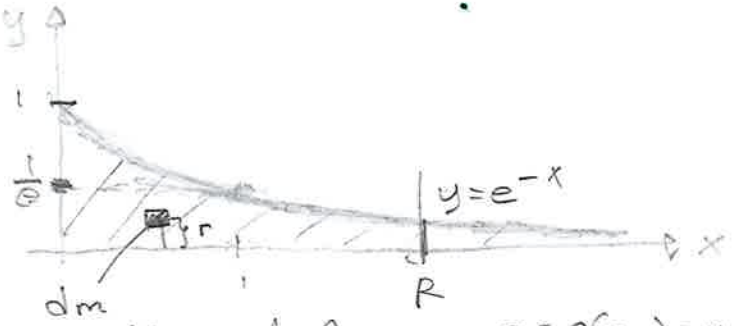
SOMIT:

- f hat in $(0,0)$ das einzige lokale Max., das zugleich (aufgrund Konkavität) globales Max. auf B ist; es gibt kein lokales Min. im Inneren von B.
- f hat genau ein Rand max. in $(-1,0)$, das kein Extremum auf ganz B ist und genau ein Rand min. in $(2,0)$, das zugleich globales Min. auf B für f ist.

VO-4 4+2

Flächenträgheitsmoment bzgl. x-Achse von

$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le e^{-x}, x \ge 0\}$



mit Massenbelegung $\varrho = \varrho(x,y) = x$

$$I_x = \iint_{B^*} r^2 \, dm$$

$$= \iint_B dA \; r^2 \varrho$$

B ist in x-Richtung unbeschränkt (uneigentliches Doppelintegral)

~~Def~~ ~~besc~~ beschr. Bereich

$B_R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le e^{-x}, \cancel{0 \le x} \le R\}$.

formal: $I_x = \lim_{R\to\infty} \int_0^R dx \int_0^{e^{-x}} dy \, y^2 x = \int_0^\infty \ldots$

Dann

$$I_x = \lim_{R\to\infty} \iint_{B_R} dA \; r^2 \varrho$$

$$= \lim_{R\to\infty} \iint_{B_R} dA \; y^2 x$$

Der Integrand ist ein Polynom und damit stetig auf B_R und der Rand von B_R stückweise glatt. Nach Satz von Fubini exist.

$I_x(R) := \iint_{B_R} dA \; y^2 x$

und kann als iteriertes Integral

$\int_0^R \int_0^{e^{-x}} dx\, dy \; x y^2$, (*)

wobei $dA = dx\,dy$ benutzt wird, geschrieben werden

D.h.:

$$I_x(R) = \int_0^R dx \; x \underbrace{\int_0^{e^{-x}} dy \; y^2}$$

eine Stammfkt zu y^2 $\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{e^{-x}} = \frac{e^{-3x}}{3}$ nach 2. HS

$\circ \; e^0 = 1 \ldots$

$$= \int_0^R dx \; \frac{x e^{-3x}}{3}$$

Linearität des Integr. $= \frac{1}{3} \int_0^R dx \; \cancel{e^{-3x}} x$

$\overset{NR}{=} \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^2}\left(R + \frac{1}{3}\right) e^{-3R}$

NR: Über part. Integr. (und 2. H.S.) $uv\big|_0^R - \int_0^R u'v$

$\int_0^R dx \; \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^{-3x}}_{v'} = -\frac{1}{3} x e^{-3x}\Big|_0^R + \frac{1}{3} \underbrace{\int_0^R dx \; e^{-3x}}_{-\frac{1}{3} e^{-3x}\big|_0^R}$

$u' = 1, \; v = -\frac{1}{3} e^{-3x}$

$= -\frac{1}{3} R e^{-3R} + 0 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3} e^{-3R} + \frac{1}{3}\right)$

$= \frac{1}{9} - \frac{1}{3}\left(R + \frac{1}{3}\right) e^{-3R}$

$$\underline{\underline{I_x = \lim_{R\to\infty} \left(\frac{1}{27} - \frac{1}{9}\left(R + \frac{1}{3}\right) e^{-3R}\right)}}$$

$$\overset{\text{GW Sätze}}{=} \frac{1}{27} - \frac{1}{9} \underbrace{\lim_{R\to\infty} \frac{R + \frac{1}{3}}{e^{3R}}}_{0} = \underline{\underline{\frac{1}{27}}}$$

0, da exponentielles Wachstum gegenüber polynomiellem Wachstum gewinnt oder NNR

NNR: $\lim_{R\to\infty} \frac{R + \frac{1}{3}}{e^{3R}} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\underset{\text{de l'H.}}{=}} \lim_{R\to\infty} \frac{1}{3 e^{3R}} \overset{\text{Eigenschaft von } e^x}{=} 0$

$\frac{1}{3} e^{-3R}$