VO Prüfung — A

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten genau zu begründen!
Jede Aufgabe ist 6 Punkte wert.

Aufgabe 1 Untersuchen Sie die Konvergenz der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{\sqrt{n}} (x-1)^n .$$

Anleitung: *Bestimmen Sie Konvergenzradius und -intervall (Skizze). Wo ist die Reihe bedingt bzw. absolut konvergent?* **1 Bonuspunkt**: *Wo ist sie gleichmäßig konvergent?*

Aufgabe 2 **(a)[3 P.]** Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, welche die folgenden beiden Bedingungen erfüllen und fertigen Sie eine Skizze an:

$$\frac{|z+1|}{|z-1-i|} > 1 \qquad \text{und} \qquad |z-1| \geq 1.$$

1 Bonuspunkt: Es soll weiters $|\operatorname{Arg}(1-z^2)| < \pi$ erfüllt werden.

(b)[3 P.] Bestimmen Sie alle 3. Wurzeln von

$$-4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\,i.$$

Skizze.

Aufgabe 3 Bestimmen und Klassifizieren Sie die Extrema der folgenden Funktion

$$f(x,y) := y + \frac{1}{y-x^2} - x$$

im Inneren und am Rand des Definitionsgebietes von f.

Anleitung: *Maximaler Definitionsbereich von f? Wo ist f stetig bzw. differenzierbar? Skizze des Definitionsgebietes mit kritischen Punkten. Benützen Sie den Satz von Schwarz.*

2 Bonuspunkt: f werde auf die rechte abgeschlossene Halbebene eingeschränkt. Was ist nun zu beachten? Extrema?

Aufgabe 4 Berechnen Sie das Doppelintegral

$$\iint_B \mathrm{d}A (1-x+y)^2,$$

wobei B das Innere des Dreiecks mit den Ecken $P(0,0)$, $Q(0,1)$ und $R(2,2)$ ist.

Anleitung: *Existenz des Integrals? Skizzieren Sie B. Flächenelement $\mathrm{d}A$ in rechtwinkligen Koordinaten? Wechsel von Doppelintegral auf iteriertes Integral (Satz von Fubini).*

1 Bonuspunkt: $(1-x+y)^2$ werde durch $\frac{1}{(1-x+y)^2}$ ersetzt. Existiert das Integral? — Das neue Integral ist nicht auszurechnen.

Name: **Matr.-Nr:** **Unterschrift:**

VO-1

Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2^{2n+1}}{\sqrt{n}}}_{a_n} (x-\underset{x_0}{1})^n$ (*)

$a_n > 0\,,\ n \in \mathbb{N}$

- **Konvergenzradius R:**

Lt. VO. (nach Cauchy-Hadamard)

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2^{2+\frac{1}{n}}}{\sqrt[2]{\sqrt[n]{n}}} = 2^2 \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{*} 4 =: q$$

$*\ \sqrt[n]{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ n. VO.

$\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ n. VO.

$\sqrt[2]{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ n.d. & Stetigkeit von $\sqrt{\cdot}$

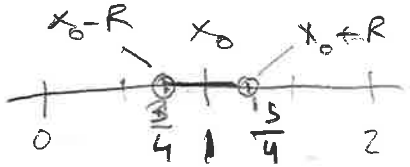
$$\underline{\underline{R := \frac{1}{q} = \frac{1}{4}}}$$

(Bonus: Nach VO konv. Potenzreihe glm. auf kompakte Teilmengen vo. | $(\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$; cf. Weierstraß-Krit.;

Endpunkte können nicht hinzugenommen werden)

4+2

- **Konvergenzintervall**



(x_0-R, x_0+R)

$= (\frac{3}{4}, \frac{5}{4}) = I$

Nach VO

- konvergiert Reihe absolut für $|x-x_0| < R$ (d.h. $x \in I$)
- divergiert Reihe für $|x-x_0| > R$ (d.h. $x \in \mathbb{R}\setminus I = (-\infty, 3/4) \cup (\frac{5}{4}, \infty)$)
- bedingte Konv. kann in den Endpkten (Rand!) vorliegen.

- **Randkonvergenz**

$\boxed{1}$ $x = x_0 - R = \frac{3}{4}$ $(x - x_0 = -\frac{1}{4})$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{\sqrt{n}} (-\tfrac{1}{4})^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{2}{\sqrt{n}}}_{b_n}$$

$b_n > 0,\ n \in \mathbb{N}$

Da $\lim_{n\to\infty} b_n = 2 \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} \overset{\sqrt{\cdot}\text{ stetig in } [0,\infty)}{=} 2 \sqrt{\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{0}} = 0$ (GW-S. f. VO)

und $b_{n+1} = \frac{2}{\underbrace{\sqrt{n+1}}_{>\sqrt{n}}} < \frac{2}{\sqrt{n}} = b_n$ für $n \in \mathbb{N}$

gilt nach Leibniz-Krit., dass Reihe (bedingt) konv.

$\boxed{2}$ $x = x_0 + R = \frac{5}{4}$ $(x - x_0 = +\frac{1}{4})$

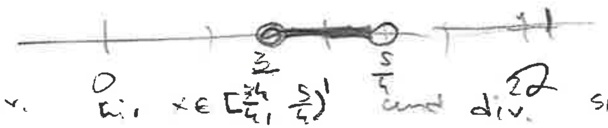
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{\sqrt{n}} (+\tfrac{1}{4})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2}{\sqrt{n}}}_{b_n}$$ (**)

Wegen $b_n = \frac{2}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$

und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent (harm. Reihe), ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ div. Minorante für (**)

und nach Vergleichskrit. div.

Insg.:



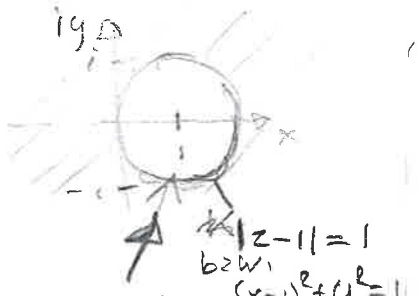
Reihe konv. für $x \in [\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$ und div. sonst über $\mathbb{R}$.

VO-2

(a) $z \in \mathbb{C}$ mit

$\frac{|z+1|}{|z-1-i|} > 1$ (i) und $|z-1| \geq 1$ (ii)

$\underbrace{z-1-i}_{z-(1+i)}$



(i): $z \neq 1+i$ (sonst Division durch 0)

$|z+1| > |z-1-i| \quad |^2$ + Subst: $z = x+iy$

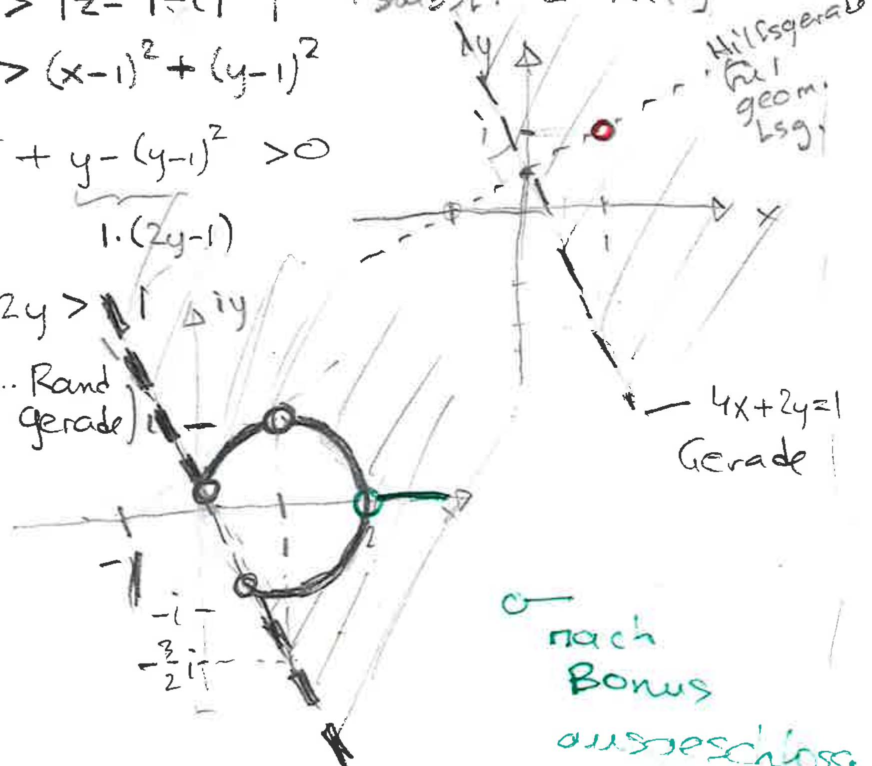
$(x+1)^2 + y^2 > (x-1)^2 + (y-1)^2$

$\underbrace{(x+1)^2-(x-1)^2}_{2(2x)} + \underbrace{y^2-(y-1)^2}_{1\cdot(2y-1)} > 0$

$4x + 2y > 1$

($4x+2y=1$ ... Randgerade)

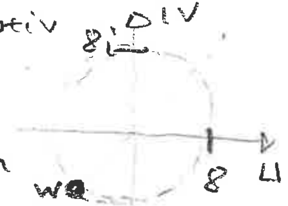
(i) $\wedge$ (ii):



Bonus: $1-z^2 < 0 \Leftrightarrow z = x$ mit $\cancel{x} \in \mathbb{R}$ und $|x| \geq 1$

$|\mathrm{Arg}(1-z^2)| = \pi \Leftrightarrow z = x$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $|x| \geq 1$

(b) Alle 3. Wurzeln von w



$w = -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i = 8\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$= 8\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

d.h., Lösungen von

$z^3 = w$. $|\sqrt[3]{\ }$ Mehrwertigkeit der $\sqrt[3]{\ }$ +VO

$z = z_k$ mit $z_k = \sqrt[3]{\underbrace{8}_{2^3}}\, e^{\left(-i\frac{3\pi}{4} + i2\pi k\right)/3}$

$= 2\, e^{-i\frac{\pi}{4} + i\frac{2\pi}{3}k}$

Funktionalgl.

$e^{z+w} = e^z e^w$, $z, w \in \mathbb{C}$

$= 2\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\, e^{i\frac{2\pi}{3}k}$, $k \in \mathbb{Z}$

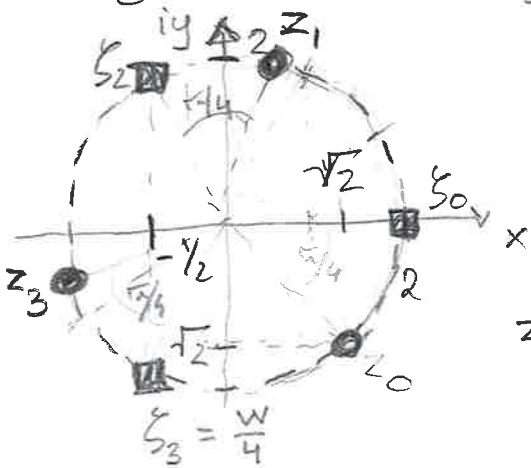
"3ten Einheitsw. ζ_k"

wegen rationaler Wurzel ($m=3$), $k = 0, 1, \ldots, m$;

d.h., $k = 0, 1, 2$. (dann Wiederholung)

$z_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}$



$z_1 = 2e^{+i\frac{5\pi}{12}} = \ldots$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

$z_2 = 2e^{i\frac{13}{12}\pi} = 2e^{-i\frac{11\pi}{12}}$

$= -\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

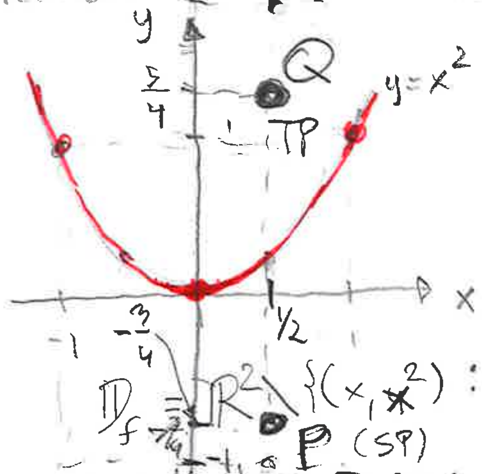
VO-3 4+2

$$f(x,y) = y + \frac{1}{y-x^2} - x$$

$p(x,y)$, $r(x,y)$

- **max. Def.bereich**

Auf gleichen Nenner gebracht ist f eine rationale Fkt., die genau in den Nennernullstellen (x, x^2), $x \in \mathbb{R}$, der Parabel $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, nicht def. ist.



$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$.

- **Stetigkeit & Diff.barkeit**

Als rationale Fkt. ist f in $\mathbb{D}_f$
- stetig,
- beliebig oft partiell nach x, y diff.bar ($f \in C^\infty(\mathbb{D}_f)$) und damit

(Satz aus VO) dort diff.bar.

- **Innere Extrema**

Notwendige Bdg. nach Verallg. Satz von Fermat:
$$\nabla f \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_x \overset{!}{=} 0 \\ f_y \overset{!}{=} 0 \end{cases}$$

In $\mathbb{D}_f$:
$$f_x = \frac{2x}{(y-x^2)^2} - 1 \overset{!}{=} 0 \quad (i)$$
$$f_y = 1 - \frac{1}{(y-x^2)^2} \overset{!}{=} 0 \quad (ii)$$

- $x = \frac{1}{2}$:

Aus z.B. (ii):
$$(y - \tfrac{1}{4})^2 - 1 = 0$$
$$(y - \tfrac{5}{4})(y + \tfrac{3}{4}) = 0$$
$$y_1 = -\tfrac{3}{4}, \quad y_2 = \tfrac{5}{4}$$

$P(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$, $f|_P = -\frac{9}{4}$

$Q(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$, $f|_Q = \frac{7}{4}$

2 krit. Pkte

- $x \neq \frac{1}{2}$: (i) und (ii) widersprechen sich.

- **Klassifizierung** (über Hessematrix, hinreichende Bdg.)

$$f_{xx} = \cdots = +2\,\frac{3x^2+y}{(y-x^2)^3}$$
S.v.Sch.
$$f_{xy} = f_{yx} = \cdots = -\frac{4x}{(y-x^2)^3}$$
$$f_{yy} = \cdots = \frac{2}{(y-x^2)^3}$$

$$H|_P = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}\Big|_P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\det H|_P = -4 < 0 \leadsto (\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{9}{4})$ Sattelpkt.

$$H|_Q = \cdots = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l}\det H|_Q = +4 > 0 \\ f_{xx}|_Q = 4 > 0\end{array}\right\} \Rightarrow H|_Q$ pos. def

$\Rightarrow (+\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4})$ lok. Minimum

<u>Bem.</u>: $\det H = \frac{4}{(y-x^2)^5}$ in $\mathbb{D}_f$

<u>Insb.</u>: $\det H > 0$ für $y > x^2$

$f_{yy} = \frac{2}{(y-x^2)^3} > 0$

<u>Damit</u>: H pos. def. „über" Parabel und f konvex „über" Parabel

$\overset{VO}{\Rightarrow}$ lokales Min. ist „globales" Min. „über" Parabel add VO-3

◎ Randextrema*

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(u,u^2)\\ y>x^2}} f(x,y) = +\infty$, (1)

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(u,u^2)\\ y<x^2}} f(x,y) = -\infty$; (2)

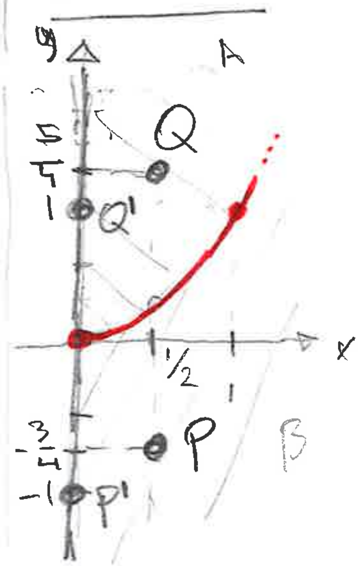
d.h., keine Randextremum.

* Rand ist Parabel $y=x^2$, $x\in\mathbb{R}$.

Bem: (1), (2) $\Rightarrow$ es gibt keine globalen Max.! Min. im gesamten $\mathbb{D}_f$

ABER (s.o.): Lokales Min. in $(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}) \in \mathbb{D}_f$ "über Parabel" ist globales Min., wenn f auf den Teil "über der Parabel" eingeschränkt wird.

Bonus!



Neuer Rand:

- Parabel $y=x^2$, $x\neq 0$
- y-Achse

(a) Keine Randextrema auf Parabel (s.o.), denn $|f|\to+\infty$ bei Annäherung.

(b) $x=0$, $y\neq 0$:

$g(y) := f(0,y) = y+\frac{1}{y} = \frac{y^2+1}{y} = \begin{cases} \frac{(y-1)^2}{y}+2, & y>0 \\ \frac{(y+1)^2}{y}-2, & y<0 \end{cases}$

Somit: $g(y) \begin{cases} >2, & y>0, y\neq 1 \\ <-2, & y<0, y\neq -1 \end{cases}$

$f|_{y\text{-Achse}}$ hat einziges lokales Min. in $(0,1,2)$ ("global" oberhalb v. Parabel) und einziges lokales Max. in $(0,-1,-2)$ ("global" unterhalb v. Parabel)

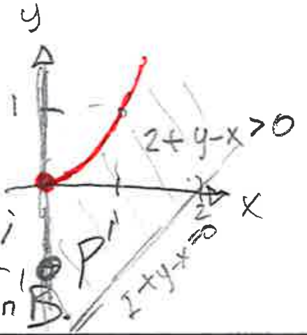
Zusatz:

$f(x,1) = +2-x+\frac{x^2}{1-x^2} < 2$ für x nahe 0;

d.h., $(0,1,2)$ kein lokales Min. auf A.

Weiters: "Unter" Parabel $(y<x^2, x\geq 0)$ und $\mathbb{D}_{f,neu}$ gilt $f(x,y) < -2$

g.d.w. $\underbrace{(2+y-x)}_{>0 \text{ nahe bei } P' \text{ (cf. Skizze)}}\overbrace{(y-x^2)}^{>0 \text{ n.V.}} > 0$;



d.h. $(0,-1,-2)$ lokal. Max in B.

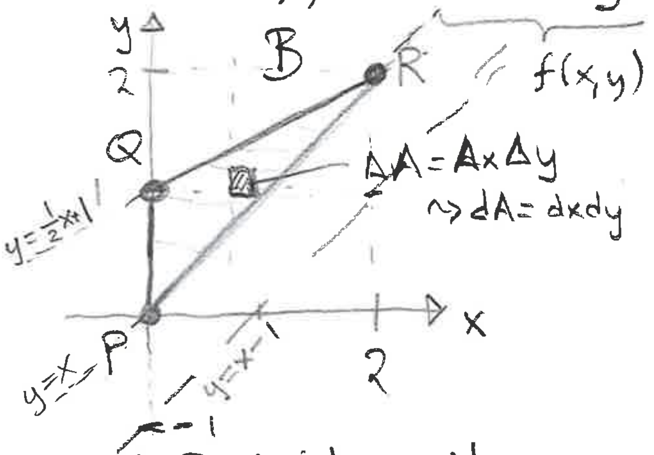
Weiters:

krit. Pkt. Q, P und deren Klassif. bleiben erhalten

2

VO-4

$$I := \iint_B dA\, \underbrace{(1-x+y)^2}_{f(x,y)}$$



B ist Dreieck mit stückweisem glatten Rand und f, ein Polynom, ist stetig auf $\overline{B}$ (kompakter Abschluß). Nach S.v.Fubini exist. das Integral und

$$I = \int_0^2 dx \underbrace{\int_x^{\frac{1}{2}x+1} dy\, (1-x+y)^2}_{g(x)}$$

iteriertes Integral

Polynom
$p(y) := (1-x+y)^2$
hat Stammfkt

$$P(y) = \frac{1}{3}(1-x+y)^3$$

und nach 2. HS. der Diff. & Int.-rechnung:

$$g(x) = P(y)\Big|_x^{\frac{1}{2}x+1}$$

$$= \frac{1}{3}\left(2-\frac{1}{2}x\right)^3 - \frac{1}{3}\cdot 1^3$$

für $x \in [0,2]$.

Somit:

$$I \overset{*}{=} \frac{1}{3}\int_0^2 dx\left(\left(2-\frac{x}{2}\right)^3 - 1\right)$$

$$\overset{**}{=} \frac{1}{3}\left[-\cancel{2}\frac{\left(2-\frac{x}{2}\right)^4}{\cancel{4}_2} - x\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} - 2 + \frac{2^4}{\frac{2}{2^3}} + 0\right)$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{11}{2} = \frac{11}{6}$$

* Linearität von $\int$

** Stammfkt. + 2. H.S.

Bonus:

Sei $f(x,y) := \dfrac{1}{(1-x+y)^2}$.

f ist rational und damit stetig abseits der Geraden

$\gamma_0 : y = x-1,\ x \in \mathbb{R}$, wo d. Nenner v. f verschwindet.

(f ist konst. auf Geraden $\gamma_c : y = x-1+c,\ x \in \mathbb{R}$ mit $c \in \mathbb{R},\ c \neq 0$.)

Insb. ist f stetig auf $\overline{B}$, welches (cf. Skizze) strikt „oberhalb" von γ_0 liegt, und nach S.v.Fubini exist. das Integral.

4 : Rechnung + Skizze
2 : Begründung