VO Prüfung — A

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten genau zu begründen!
Jede Aufgabe ist 6 Punkte wert.

Aufgabe 1 Untersuchen Sie die Konvergenz der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n+1}} (x+1)^n \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Anleitung: *Bestimmen Sie Konvergenzradius und -intervall (Skizze). Wo ist die Reihe absolut bzw. bedingt konvergent? Wo divergent?*

2 Bonuspunkte: Konvergenz am Rand und gleichmässige Konvergenz, falls $x \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2 **(a)**[**3 P.**] Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, welche die folgenden beiden Bedingungen erfüllen und fertigen Sie eine Skizze an:

$$-\frac{\pi}{3} < \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2} \qquad \text{und} \qquad |z-1| \geq 1.$$

1 Bonuspunkt: Es soll weiters $|\operatorname{Arg}(1+z^2)| < \pi$ erfüllt werden.

(b)[**3 P.**] Bestimmen Sie alle 3. Wurzeln von

$$w = -\frac{\sqrt{2}}{16} + \frac{\sqrt{2}}{16} i;$$

d.h., finden Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 - w = 0$. Skizze.

1 Bonuspunkt: Wieviele Lösungen hat $3^z - w = 0$? Erklärung! Skizze ($\frac{\pi}{\ln(3)} \approx 3$).

Aufgabe 3 Bestimmen und Klassifizieren Sie die Extrema der folgenden Funktion

$$f(x,y) := y + \frac{1}{x(y-1)} - x$$

im Inneren und am Rand des Definitionsgebietes von f.

Anleitung: *Maximaler Definitionsbereich von f? Wo ist f stetig bzw. differenzierbar? Skizze des Definitionsgebietes mit kritischen Punkten. Benützen Sie den Satz von Schwarz.*

2 Bonuspunkt: f werde auf die obere abgeschlossene Halbebene eingeschränkt. Was ist nun zu beachten? Extrema?

Aufgabe 4 Gegeben ist dreiviertel eines homogenen soliden hohlen Zylinders der Höhe 1 und innerem Radius 1/2 und äusserem Radius 1. Bestimmen Sie den Schwerpunkt.

Anleitung: *Existenz der Integrale? Skizze vom Bereich. Volumselement $\mathrm{d}V$ in Zylinder-Koordinaten? Wechsel von Dreifachintegral auf iteriertes Integral (Satz von Fubini). Benutzen Sie Symmetrieüberlegungen. Das Volumen kann geometrisch hergeleitet werden.*

Name: **Matr.-Nr:** **Unterschrift:**

VO-1 4+2

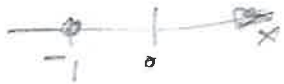
$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n+1}}}_{a_n} (x+1)^n, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (*)$$

ist Potenzreihe (P.R) mit pos. Koeff., ≥ 0

$$a_n := \frac{1+(-1)^n}{\underbrace{\sqrt{n+1}}_{>0}} \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

und Entwicklungsmitte

$x_0 = -1$.



Der Konvergenzradius ist

$R := \frac{1}{q}$,

wobei (nach Cauchy-Hadamard)

$$q := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

(Die alternative Formel mit dem Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ funktioniert nicht, da $a_{2m+1} = 0$, $m \in \mathbb{N}_0$.)

Def. von abs. / bedingt / glm. konvergent : siehe Skriptum.

- Konvergenzradius R:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \overset{(*)}{=} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{\frac{2}{\sqrt{n+1}}}, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Wegen

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}\,(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

(*) Rechenregeln für Potenzen

- $\sqrt[n]{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ (VO)
- $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ (VO)
- $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n}} = e^0 = 1$

beschr.

Exp.-Fkt. stetig auf $\mathbb{R}$

Also

Teilfolgeneig.

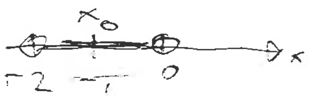
$$q = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{\sqrt{n+1}}} = 1$$

Somit:

$R = \frac{1}{q} = 1$

und Konvergenzintervall ist

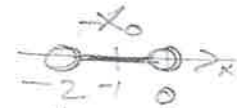
$$(x_0 - R, x_0 + R) = (-1-1, -1+1) = (-2, 0).$$



Reihe (*) konv. nirgends in $\mathbb{R}$ bedingt. ⇐

Nach Theorie ist die Potenzreihe

- absolut konv. für alle $x \in \mathbb{R}$ mit
  $|x+1| < R = 1$



- divergent für alle $x \in \mathbb{R}$ mit
  $|x+1| > R = 1$

- Konvergenz am Rand

(gesondert zu untersuchen)

Am Rand ist $x = -2$ bzw. $x = 0$, also $x - x_0 = \mp 1$,

und

$$a_n (x-x_0)^n = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{n+1}}, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

O.B.d.A. $N \in \mathbb{N}$ gerade. Dann

$$\sum_{n=0}^{N} a_n (x-x_0)^n = \sum_{m=0}^{N/2} \frac{2}{\sqrt{2m+1}} \geq \sum_{m=1}^{N/2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m}}$$

Da die allg. harm. Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$

für $0 < s \leq 1$ div., ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m}}$$

div. Minorante für (*)

und (*) divergiert in Endpkten des Konv.-Intervalls

VO-1 (Bonus) Konvergenz am Rand, falls $z\in\mathbb{C}$ 2

Ann.: $z\in\mathbb{C}$ mit $|z+1|=1$

und $z\neq -2$ und $z\neq 0$.

Konvergenzbeschl. mittels Abelscher Summatio.

(O.B.d.A. $N=2M$ gerade)

(1)
$$\sum_{n=0}^{N}\frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n+1}}(z+1)^n=\sum_{m=0}^{M}\underbrace{\frac{2}{\sqrt{2m+1}}}_{\beta_m}\underbrace{\left((z+1)^2\right)^m}_{\alpha_m}$$

$$=A_M\beta_{M+1}-\sum_{k=0}^{M}A_k(\beta_{k+1}-\beta_k),$$

wobei
$$A_k=\sum_{m=0}^{k}\alpha_m=\sum_{m=0}^{k}\left((z+1)^2\right)^m$$
$$\overset{\text{A}}{=}\frac{\left((z+1)^2\right)^{k+1}-1}{\underbrace{(z+1)^2-1}_{z(z+2)}}$$

A Summationsformel f. geom. (endl.) Reihe

D.h.
$$\sum_{n=0}^{N}\frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n+1}}(z+1)^n=\underbrace{\underbrace{\frac{\left((z+1)^2\right)^{M+1}-1}{z(z+2)}}_{\substack{\text{beschr.}\\ \text{(s.u.)}}}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2M+1}}}_{\substack{\text{Nullfolg}\\ \text{für } M\to\infty}}}_{\xrightarrow[M\to\infty]{}0}-\frac{2}{z(z+2)}\underbrace{\sum_{k=0}^{M}\left(\left((z+1)^2\right)^{k+1}-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2k+3}}-\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\right)}_{(\ast\ast)}$$

NR1: $$\beta_{k+1}-\beta_k=-\frac{\sqrt{2k+3}-\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+3}\sqrt{2k+1}}=-\frac{2}{\sqrt{2k+3}\sqrt{2k+1}\left(\sqrt{2k+3}+\sqrt{2k+1}\right)}$$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

NR2: $$\beta_{k+1}-\beta_k\sim-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(k+1)^{3/2}}\quad\text{für } k\to\infty$$

NR3: Dreiecksungleg. / Potenzrechenregeln
$$\left|\left((z+1)^2\right)^{k+1}-1\right|\leq\left|\left((z+1)^2\right)^{k+1}\right|+1=|z+1|^{2(k+1)}+1=2$$

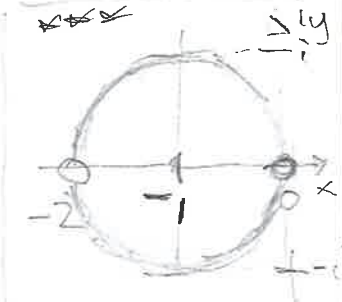
1. n. V.

Wegen
$$\left|\sum_{k=m}^{M}\overbrace{\left(\left((z+1)^2\right)^{k+1}-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2k+1}}-\frac{1}{\sqrt{2k+3}}\right)}^{f_k(z)}\right|$$

Dreiecks Ungleg. $\rightarrow$
$$\leq\sum_{k=m}^{M}\underbrace{\left|\left((z+1)^2\right)^{k+1}-1\right|}_{\leq 2\text{, NR3}}\left(\frac{1}{\sqrt{2k+1}}-\frac{1}{\sqrt{2k+3}}\right)$$
$$\leq 2\underbrace{\sum_{k=m}^{M}\left(\frac{1}{\sqrt{2k+1}}-\frac{1}{\sqrt{2k+3}}\right)}_{\text{Teleskopsumme}}=2\left(\frac{1}{\sqrt{2m+1}}-\frac{1}{\sqrt{2M+1}}\right)\leq\frac{2}{\sqrt{2m+1}}$$

konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}f_k(z)$ nach dem Cauchy-Krit. für Reihen und
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n+1}}(z+1)^n\overset{!}{=}+\frac{2}{z(z+2)}\sum_{k=0}^{\infty}f_k(z),\quad z\text{ laut Ann.}$$

$\ast\ast\ast$



add VO-1 (Bonus)

Glm. Konvergenz

Nach Theorie konv. eine Potenz-Reihe glm. auf jedem kompakten Teil der offenen Konvergenzkreisscheibe.

Hier:

denn der Konvergenzkreisradius ist $R=1$ und Entwicklungsmitte ist $z_0=-1$.

bereits OK

Einbeziehung des Randes

Abelsche Summation funktioniert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+1| \leq R=1$; d.h.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n+1}}(z+1)^n = \frac{2}{z(z+2)} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) \qquad f_k \text{ s.o.}$$

$$= \frac{2}{z(z+2)}\Big(-1+\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\Big(\frac{1}{\sqrt{2k+1}}-\frac{1}{\sqrt{2k+3}}\Big)(z+1)^{2(k+1)}}_{g_k(z)}\Big)$$

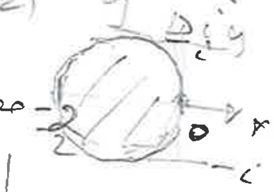
Wegen

$$|g_k(z)| \leq |z+1|^{2(k+1)}\Big(\frac{1}{\sqrt{2k+1}}-\frac{1}{\sqrt{2k+3}}\Big) \leq \frac{1}{\sqrt{2k+1}}-\frac{1}{\sqrt{2k+3}} =: c_k$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+1| \leq 1$ und

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} c_k = \lim_{K\to\infty}\Big(1-\frac{1}{\sqrt{2K+3}}\Big) = 1,$$

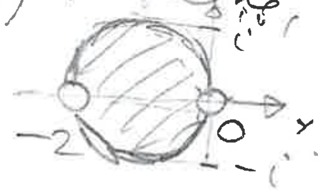
konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(z)$ glm. auf der abgeschl. Kreisscheibe



nach dem Weierstrasskrit.

Da $z \neq 0,-2$ in ursprüngl. Reihe,

folgl. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n+1}}(z+1)^n$ $\checkmark$



konv. ~~gleich~~ glm. auf jedem kompakten Teil von

VO-2

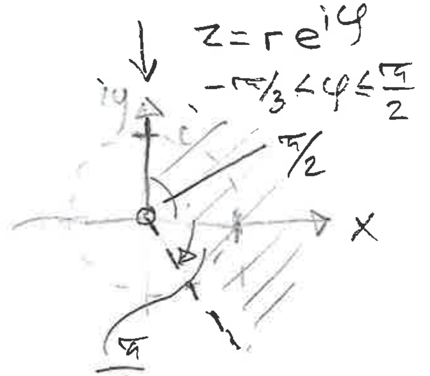
(a) $z \in \mathbb{C}$ mit

3

$-\frac{\pi}{3} < \mathrm{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}$ und $|z-1| \geq 1$

$\downarrow\ z = re^{i\varphi}$

$-\pi/3 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

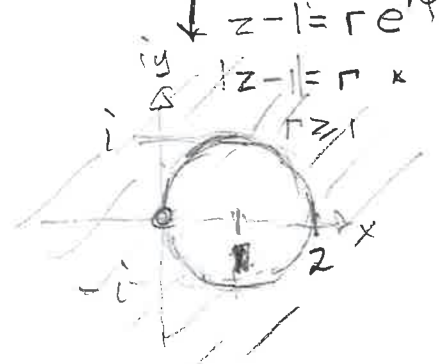


Winkelbereich, Zentrum: 0

$\downarrow\ z-1 = re^{i\varphi}$

$|z-1| = r$ *

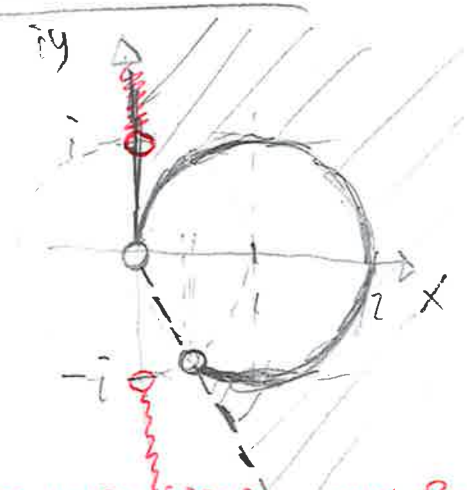
$r \geq 1$



Ausserhalb (einschl. Rand) Kreisscheibe mit Radius 1 und Mittelpkt (1,0).

* da $|e^{i\varphi}| = 1$

Zusammen:



um ausschließen nach Bonus

Bonus:

$1+z^2 \in (-\infty, 0]$

$\Leftrightarrow z = iy$ ~~mit~~ $y \in \mathbb{R}$ und $|y| \geq 1$

D.h.

$|\mathrm{Arg}(1+z^2)| = \pi$

$\Leftrightarrow z = iy$ mit $y \in \mathbb{R}$ und $|y| > 1$

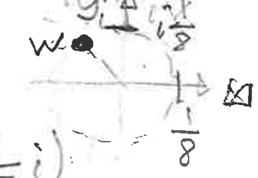
$\mathrm{Arg}(0)$ nicht def.

(b) Alle 3. Wurzeln von

3

$w = -\frac{\sqrt{2}}{16} + \frac{\sqrt{2}}{16} i = \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right)$

$= \frac{1}{8}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$, $e^{+i\frac{3\pi}{4}}$



Sind Lösungen von

$z^3 = w \quad |\sqrt[3]{\cdot}$ (komplexe 3. Wurzel)

$z = z_k$ mit $z_k \overset{(*)3}{=} \sqrt[3]{\frac{1}{8}}\, e^{\left(i\frac{3\pi}{4} + i 2\pi k\right)/3}$

$= \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{2\pi}{3}k}$

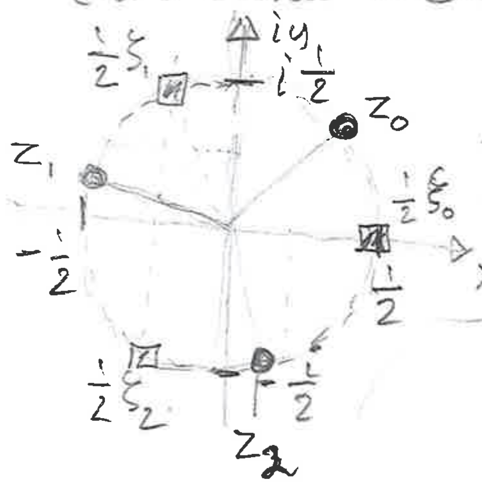
$\overset{(**)}{=} \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \underbrace{e^{i\frac{2\pi}{3}k}}_{\text{3ten Einheitswurzeln } \xi_k}$

$k \in \mathbb{Z}$

(*) Mehrwertigkeit der Wurzel

(**) Funktionalglg. $e^{z+w} = e^z e^w \quad z, w \in \mathbb{C}$

Wegen rat. Wurzel $(n=3)$ ist $k = 0,1,2$ (und dann wiederholen sich die Werte)



$z_0 = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}} + i\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$z_1 = \frac{1}{2} e^{i\frac{11\pi}{12}} = \dots$

$= -\frac{\sqrt{3}+1}{4\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{2}}$

$z_2 = \frac{1}{2} e^{i\frac{19\pi}{12}} = \dots$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}+1}{4\sqrt{2}}$

add VO2-2(b) (Bonus)

Umgeformt ist

$$3^z = w. \quad (*)$$

Anwendung des komplexen Log. gibt

$$\ln(3)\, z = \log(w)$$

Def. des kompl. Log. gibt

$$\log(w) = \ln|w| + i \arg(w) + i\underbrace{2\pi k}_{\text{wegen Vielwertigkeit}},\ k \in \mathbb{Z}$$

D.h. $\log(w) = \ln\left(\frac{1}{8}\right) + i\frac{3\pi}{4} + i\,2\pi k$

$$= -3\ln(2) + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)$$

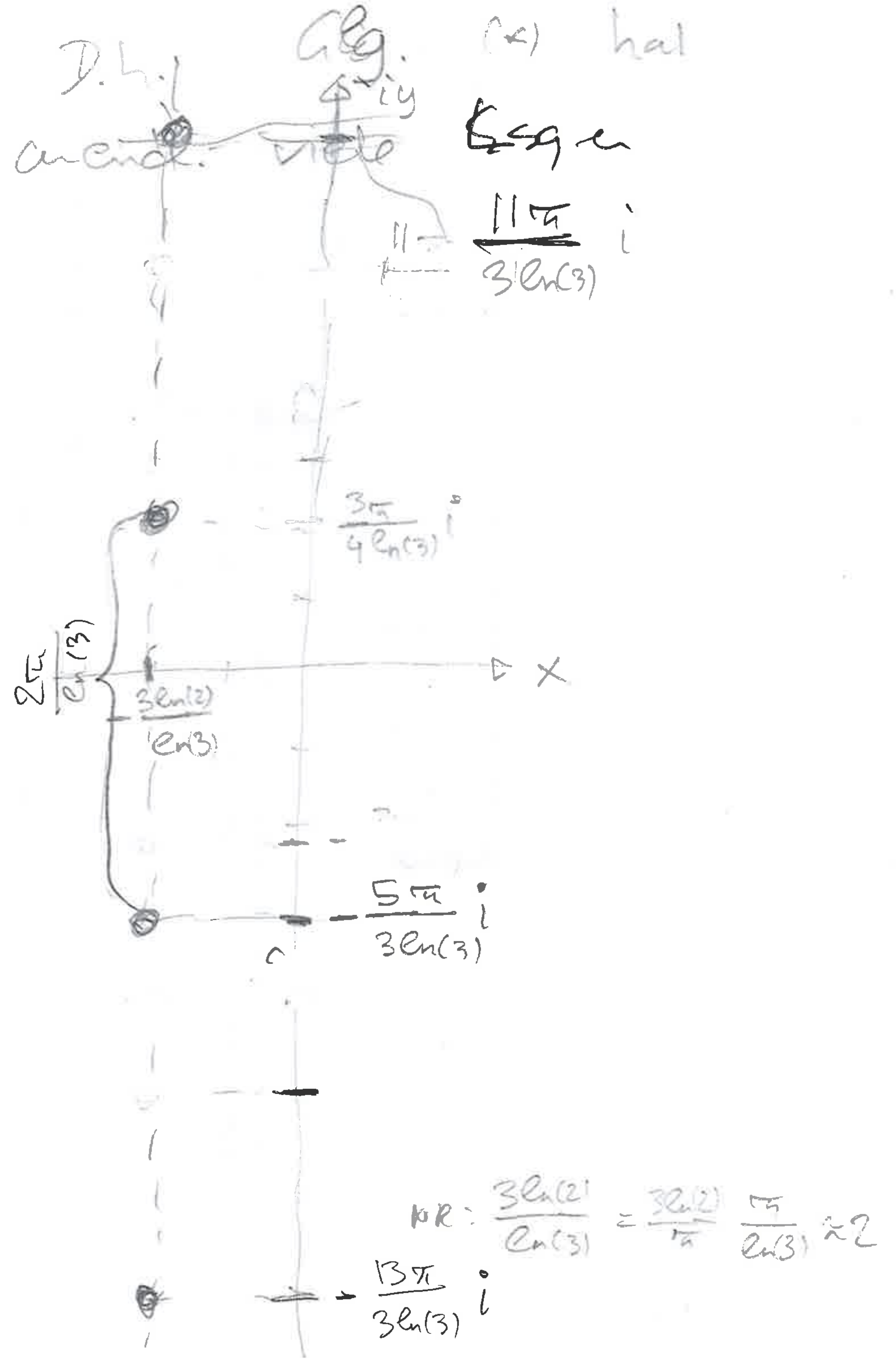
Somit

$$z = z_k$$

mit

$$z_k = -\frac{3\ln(2)}{\ln(3)} + i\left(\frac{3}{4} + 2k\right)\frac{\pi}{\ln(3)}\, i$$

$k \in \mathbb{Z}$



VO-3

4+2

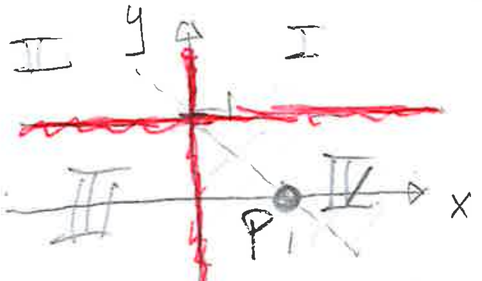
$$f(x,y) := y + \frac{1}{x(y-1)} - x$$

∘ max. Def.bereich

Auf gleichen Nenner gebracht ist f eine rationale Fkt., die genau in den Nenner-Nullstellen; d.h. auf den Kurven

$\begin{cases} x=0 \\ y\in\mathbb{R} \end{cases}$ bzw. $\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ y=1 \end{cases}$ (G)

nicht def. ist: $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{\ldots\}$



● Stetigkeit & Diff.barkeit

Als rat. Fkt. ist f in D_f

- ☑ stetig
- ☑ bel. oft part. nach x und y ableitbar ($f\in C^\infty(D_f)$)

und damit (el. VO) dort diff.bar.

● Innere Extrema

Notw. Bdg. nach Verallg. d. Satzes von Fermat:

$$\nabla f \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_x \overset{!}{=} 0 \\ f_y \overset{!}{=} 0 \end{cases}$$

In D_f:

$$f_x = -\frac{1}{y-1}\frac{1}{x^2} - 1 \overset{!}{=} 0 \quad (1)$$

$$f_y = 1 - \frac{1}{x}\frac{1}{(y-1)^2} \overset{!}{=} 0 \quad (2)$$

Beob: ☑ Für ~~x~~ <0 ist (2) nicht erfüllbar, da $1 - \underbrace{\frac{1}{x}}_{<0}\frac{1}{(y-1)^2} > 0$.

☑ Für $y>1$ ist (1) nicht erfüllbar, da $-\underbrace{\frac{1}{y-1}}_{>0}\frac{1}{x^2} - 1 < 0$.

Damit hat (1)&(2) nur im Bereich IV eine Lsg. (wenn überhaupt)

(1) bzw. (2) mit $x^2(y-1)^2$ multipl.

$$-y+1 = x^2(y-1)^2 > 0$$

$$x = x^2(y-1)^2 > 0$$

Insb.: $x = 1-y$

D.h. innere krit. Punkte liegen auf Gerade $x+y=1$.

Rückeinsetzen in (2) ergibt

$$1 - \frac{1}{x^3} \overset{!}{=} 0 \quad \text{bzw.} \quad 1 - \frac{1}{(1-y)^3} \overset{!}{=} 0$$

D.h., $P(1,0)$ mit $f|_P = \frac{1}{-1} - 1 = -2$

☑ Klassifizierung

(∗) Satz von Schwarz

$$f_{xx} = +\frac{2}{x^3(y-1)}$$

$$f_{xy} \overset{(*)}{=} f_{yx} = \frac{1}{x^2(y-1)^2}$$

$$f_{yy} = \frac{2}{x(y-1)^3}$$

Hesse-Matrix in P

$$H|_P = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}\Big|_P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l} \det H|_P = 4-1 = 3 > 0 \\ f_{xx}|_P = -2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow H|_P$ neg. def. (beide EW.e neg.)

⇝ f lok. Max. in P.

Bem: $\det H = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \frac{4-1}{x^4(y-1)^4} > 0$

und $f_{xx} \begin{cases} >0 & \text{in I und III} \\ <0 & \text{in II und IV} \end{cases}$

D.h., f ist in I und III konvex ohne lok. Extrema und f ist in II und IV konkav, wobei das einzige lok. Max. in IV ist. Dieses ist "global" in IV el. VO.

add VO-3

Randextrema

Bei Annäherung an Randgeraden in (G) wächst $|f(x,y)|$ gegen ∞,

d.h., keine Randextrema

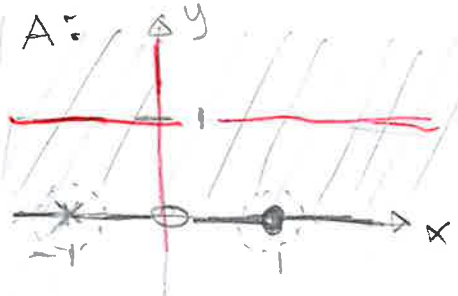
Bem: • keine globalen Min./Max in D_f.

• In I, II und III gibt es keinen Punkt mit horizontaler Tangentenebene auf den Graphen von f.

• Es gibt einziges lok. Max in IV welches für f eingeschränkt auf IV zu einem globalen Max wird, da f konkav in IV. (s.o.).

Bonus: 2

A:



x-Achse neuer Rand (neben Geraden in (G))

• $y=0$; $x \neq 0$:

$$g(x) = f(x,0) = -\frac{1}{x} - x$$

$$= \begin{cases} -\frac{(x-1)^2}{x} - 2, & x>0 \\ -\frac{(x+1)^2}{x} + 2, & x<0 \end{cases}$$

D.h., $g(x) \begin{cases} < -2, & x>0,\ x \neq 1 \\ > 2, & x<0,\ x \neq -1 \end{cases}$

D.h., $f|_{x\text{-Achse}}$ hat lokales Max. in $(1,0)$ und lok. Min. in $(-1,0)$

• f läßt sich lokal um $(-1,0)$ ~~fortsehen~~ (ist C^∞-Fkt.); d.h.

$$f(x,y) = \cancel{f(-1,0)}^{2} + \nabla f\Big|_{(-1,0)}^{T} \cdot \begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} + \frac{1}{2!}(\Delta x\ \Delta y)\, H_f\Big|_{(-1,0)+\vartheta\Delta\underline{x}} \begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}$$

für ein $0<\vartheta<1$ nach Satz von Taylor.

Hier, $\Delta\underline{x} = \begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+1\\ y\end{pmatrix}$. Da

$$\nabla f\Big|_{(-1,0)} = \begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}$$

und

$H_f\Big|_{(-1,0)+\vartheta\Delta\underline{x}}$ pos. definit

(wegen Auswertung in III), gilt

$$f(x,y) = 2 + 2\cdot\overset{\geq 0 \text{ n.V.}}{\Delta y} + \underbrace{\frac{1}{2!}(\Delta x\ \Delta y)\, H_f\Big|_{(-1,0)+\vartheta\Delta\underline{x}} \begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}}_{\geq 0 \text{ nach Def. von pos. def. Matrizen}} \geq 2 = f(-1,0)$$

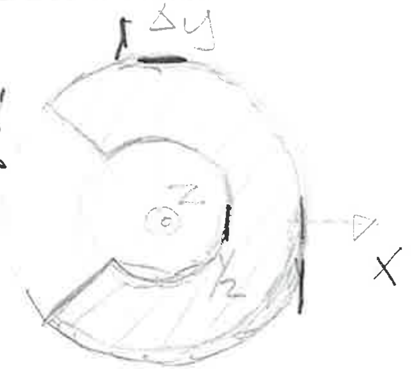
D.h., f ~~hat~~ in A lokales Minimum.

• Ähnliches Argument zeigt, dass A hat f in $(1,0)$ lok. Max. in A hat.

VO-4 4.1.2

VO: $S_{\{x,y,z\}} = \frac{1}{V} \iiint_B dV \underbrace{\{x,y,z\}}_{f(x,y,z)}$ $\quad V = \iiint_B dV$

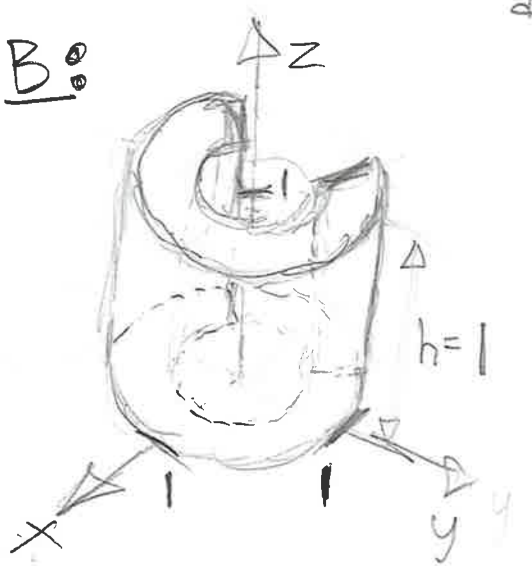
B^*:



Querschnitt

B ist ein räumlicher abgeschlossener Bereich mit stückweise glattem Rand. f ist ein Polynom auf B. Nach Satz von Fubini exist. diese Integrale und können in iterierte Int.! umgewandelt werden:

$B^{\circ\circ}$:



(*) Produktdarstellung des Integrande

$V = \iiint_B dV = \underbrace{\int_0^1 dz \iint_{B^*} dA}_{\text{iteriertes Integral}} \overset{(*)}{=} \underbrace{\left(\int_0^1 dz\right)}_{[z]_0^1 = 1 \text{ Hauptsatz Stammfkt}} \left(\iint_{B^*} dA\right) = \iint_{B^*} dA$

und

$S_x = \frac{1}{V} \iiint dV\, x = \frac{1}{V} \int_0^1 dz \iint_{B^*} dA\, x \overset{(*)}{=} \frac{1}{V} \underbrace{\left(\int_0^1 dz\right)}_{1,\, s.o.} \iint_{B^*} dA\, x = \frac{\iint_{B^*} dA\, x}{\iint_{B^*} dA}$

NR: $\iint_{B^*} dA \overset{\text{Polar-Koord}}{=} \int_{1/2}^{1} dr\, r \int_{-3\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \overset{\text{Symmetrie}}{=} 2 \int_{1/2}^{1} dr\, r \underbrace{\int_0^{3\pi/4} d\varphi}_{\frac{3\pi}{4}} = \frac{3\pi}{2} \underbrace{\int_{1/2}^{1} dr\, r}_{\frac{r^2}{2}\Big|_{1/2}^{1} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \pi = \frac{9}{16}\pi$

oder geometr.

NR: $\iint_{B^*} dA\, x \overset{\text{Polar-Koord}}{=} \int_{1/2}^{1} dr\, r^2 \int_{-3\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \cos\varphi = \underbrace{\left(\int_{1/2}^{1} dr\, r^2\right)}_{\frac{r^3}{3}\Big|_{1/2}^{1} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{8}\right)} \underbrace{\left(2 \int_0^{3\pi/4} d\varphi \cos\varphi\right)}_{2 \sin\varphi \big|_0^{3\pi/4}}$

$2 \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$= \frac{7}{3 \cdot 8} \cdot \sqrt{2}$

In Zylinderkoord.

$x = r \cos\varphi$

$y = r \sin\varphi$

$z = z$

$r \geq 0$

$z \in \mathbb{R}$

$-\pi < \varphi \leq \pi$

$dV = \underbrace{r\, d\varphi\, dr}_{dA}\, dz$

D.h., $S_x = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{1}{\pi} \cdot \frac{7}{3 \cdot 8} \sqrt{2} = \frac{2 \cdot 7}{3^3} \frac{\sqrt{2}}{\pi} = \frac{14}{27} \frac{\sqrt{2}}{\pi}$

und

$S_y = 0$ (wegen Symmetrie bzgl. x-Achse)

und

$$S_z = \frac{1}{V}\iiint_B dV\, z = \frac{1}{V}\int_0^1 dz\, z \iint_{B^*} dA = \frac{\left(\int_0^1 dz\, z\right)\left(\iint_{B^*} dA\right)}{\iint_{B^*} dA} = \int_0^1 dz\, z$$

$$= \frac{z^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$$ bzw. aufgrund von Symmetrie

Somit

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{27}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$