

Differenzial- und Integralrechnung

Musterbeispiele

1. Man bestimme den Grenzwert der Folge (a_n) , wobei $a_n = \frac{2+4+6+\dots+2n}{n^2+n+1}$.

2. Man untersuche, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$ konvergiert.

3. Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k (k+2)}{(k+3)^2} x^k$.

Des weiteren untersuche man, ob die Reihe im rechten Randpunkt des Konvergenzintervalls konvergiert.

4. Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+2}}{\sqrt{n+1}} x^n$.

5. Für welche Wahl von $a, b \in \mathbb{R}$ ist die folgende Funktion auf ganz \mathbb{R} stetig?

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{falls } x \leq 1 \\ ax - x^3 & \text{falls } 1 < x \leq 2 \\ bx^2 & \text{sonst} \end{cases}$$

6. Sei $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ eine stetige Funktion. Man zeige, dass dann f einen Fixpunkt haben muß, d.h. $\exists \xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \xi$.

(Hinweis: man betrachte $g(x) = f(x) - x$ und denke an den Nullstellensatz.)

7. Man berechne $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(1 + \frac{1}{x})$.

8. Man berechne $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$.

9. Man bestimme das Taylor-Polynom 2. Ordnung von der Funktion $f(x) = \ln(1+x^2)$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

10. Man bestimme das Taylor-Polynom 2. Ordnung der Funktion $f(x) = \sin(\frac{\pi}{4} \cos x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$.

11. Man löse mittels partieller Integration das Integral $I = \int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$.

12. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion $z(x, y) = \ln(xy) - x^2 - \frac{y}{x}$ im Bereich $x > 0, y > 0$.