Univ.-Prof. Dr. Jussi Behrndt
Dr. Markus Holzmann

Differenzial- und Integralrechnung

18. November 2020

Schriftliche Prüfung

Name: ______________________________ Matr.-Nr.: ____________________

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**. Bitte beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen! Es können maximal 16 Punkte erreicht werden. Die Prüfung gilt mit 8 Punkten als bestanden.

Bitte dieses Feld NICHT ausfüllen:

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Viel Erfolg!

Die Aufgaben sind auf separaten Blättern zu bearbeiten. Es werden der gesamte Lösungsweg und das Ergebnis bewertet.

Aufgabe 1: (2 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die Folge

$$a_n := \frac{(n+1)^2}{2n+1} - \frac{2n^2-n}{4n+1}$$

konvergiert und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 2: (2 Punkte)

Gegeben sei die Potenzreihe

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot 3^n (x-2)^n.$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius dieser Potenzreihe.

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Gegeben sei für $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} a + e^x, & x \geq 0, \\ bx^2 + cx, & x < 0. \end{cases}$$

(i) Unter welchen Bedingungen an a, b, c erhalten Sie eine im Punkt $x = 0$ stetige Funktion?

(ii) Geben Sie zusätzliche Bedingungen an, damit f in $x = 0$ differenzierbar ist.

(iii) Unter welchen Voraussetzungen an a, b, c (zusätzlich zu den in (i) und (ii) gefundenen) ist f in ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend?

Aufgabe 4: (3 Punkte)

(i) Formulieren Sie die Regel von de l'Hospital und geben Sie die dafür notwendigen Voraussetzungen an.

(ii) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \cos x}{1 - \sin x}.$$

Aufgabe 5: (3 Punkte)

Berechnen Sie

$$\int_1^e \left(x^2 + 4x + 2\right) \ln x \, \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 6: (3 Punkte)

Untersuchen Sie, ob das uneigentliche Integral

$$\int_3^4 \frac{1}{\sqrt[4]{x-3}} dx$$

existiert und bestimmen Sie, falls ja, dessen Wert.

$\boxed{\text{Vorlesungsprüfung Differenzial- und Integralrechnung}}$ 18.11.2020

(1) $a_n = \dfrac{(n+1)^2}{2n+1} - \dfrac{2n^2-n}{4n+1} = \dfrac{(n^2+2n+1)(4n+1)-(2n^2-n)(2n+1)}{(2n+1)(4n+1)}$

$$= \frac{\cancel{4n^3}+n^2+(2n+1)(4n+1)-\cancel{4n^3}+n}{(2n+1)(4n+1)} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1+\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(4+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(4+\frac{1}{n}\right)}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \underline{\underline{\frac{9}{8}}}$$

(2) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} 3^n (x-2)^n$

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2} \cdot 3^n} = 3 \cdot \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}} = 3 \Rightarrow \underline{\underline{\rho = \frac{1}{3}}}$$

(3) $f(x) = \begin{cases} a+e^x, & x \geq 0 \\ bx^2+cx, & x<0 \end{cases}$

(i) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (bx^2+cx) = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (a+e^x) = a+1 \end{array}\right\}$ f ist stetig in $x=0$, falls $\underline{a=-1}$

(ii) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{bx^2+cx}{x} = c \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1 \end{array}\right\}$ f ist differenzierbar in $x=0$, falls $\underline{c=1}$

(iii) $f'(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ 2bx+1, & x<0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)>0 \Leftrightarrow b<0$

(für $f'(x)>0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ist f auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend)

(4) (i) Es seien f, g an x_0 differenzierbar mit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.

Falls $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so gilt $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \cdot \cos x}{1 - \sin x} = \frac{0}{1} = \underline{\underline{0}}$

(5) $$\int_1^e \underbrace{(x^2+4x+2)}_{u'} \cdot \underbrace{\ln x}_{v} \, dx \overset{\text{part. Int.}}{=} \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 2x\right) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 2x\right) \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{e^3}{3} + 2e^2 + 2e - \left(\frac{x^3}{9} + x^2 + 2x\right)\Big|_1^e = \frac{e^3}{3} + 2e^2 + 2e - \left(\frac{e^3}{9} + e^2 + 2e\right) + \frac{28}{9}$$

$$= \underline{\underline{\frac{2e^3}{9} + e^2 + \frac{28}{9}}}$$

(6) $$\int_b^4 \frac{1}{\sqrt[4]{x-3}} \, dx \overset{u = x-3}{=} \int_{b-3}^1 u^{-1/4} du = \frac{4}{3} u^{3/4} \Big|_{b-3}^1 = \frac{4}{3}\left(1 - (b-3)^{3/4}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{b \to 3} \frac{4}{3}\left(1 - (b-3)^{3/4}\right) = \frac{4}{3} \text{ existiert}$$

$$\Rightarrow \int_3^4 \frac{1}{\sqrt[4]{x-3}} dx = \lim_{b \searrow 3} \int_b^4 \frac{1}{\sqrt[4]{x-3}} dx = \frac{4}{3} \text{ existiert}$$