Univ.-Prof. Dr. Jussi Behrndt
Dr. Markus Holzmann

Differenzial- und Integralrechnung

4. Februar 2020

Schriftliche Prüfung

Name: ____________________ Matr.-Nr.: ____________

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**. Bitte beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen! Es können maximal 16 Punkte erreicht werden. Die Prüfung gilt mit 8 Punkten als bestanden.

Bitte dieses Feld NICHT ausfüllen:

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Viel Erfolg!

Die Aufgaben sind auf separaten Blättern zu bearbeiten. Es werden der gesamte Lösungsweg und das Ergebnis bewertet.

Aufgabe 1: (2 Punkte)

Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $a_n := \sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4+n^2-1}$, falls dieser existiert.

Aufgabe 2: (3 Punkte)

(i) Formulieren Sie das Leibnizkriterium zur Konvergenz alternierender Reihen. Geben Sie dazu alle nötigen Voraussetzungen an!

(ii) Ist das Leibnizkriterium anwendbar, um eine Aussage über die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^n$$

zu erhalten? Konvergiert die obige Reihe?

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Welche Aussagen können über die Existenz von Minimum und Maximum der Sinus-Funktion im Intervall $\big(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\big)$ gemacht werden? Untersuchen Sie jeweils, ob Maximum und Minimum angenommen werden und begründen Sie Ihre Antworten!

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \ln(1+x^2)$.

(i) Ist f überall stetig?

(ii) Ist f an allen $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar? Falls ja, berechnen Sie die 1. Ableitung.

(iii) Hat f auf ganz $\mathbb{R}$ ein einheitliches Monotonieverhalten?

(iv) Ist f auf ganz $\mathbb{R}$ konkav bzw. konvex, d.h. hat f an allen Punkten $x \in \mathbb{R}$ das gleiche Verhalten bzgl. dieser Eigenschaften?

Begründen Sie Ihren Antworten!

Aufgabe 5: (2 Punkte)

Formulieren Sie den ersten und zweiten Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. Geben Sie alle nötigen Voraussetzungen dafür an!

Aufgabe 6: (2 Punkte)

Bestimmen Sie, für welche $\alpha > 0$ das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}x$$

existiert, und berechnen Sie für diese α den Wert des Integrals (mit vollständigem Lösungsweg).