VO-Prüfung
Differential- und Integralrechnung (PHY.C30)
14.4.2015 – Gruppe A

Name: Matrikelnummer:

Aufgabe 1: (a) Zeigen Sie mithilfe von vollständiger Induktion, dass für die n-te Partialsumme s_n der sogenannten Teleskopreihe gilt:

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = 1 - \frac{1}{n}$$

(b) Berechnen Sie weiters den Grenzwert der unendlichen Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k}$.

(8 Punkte)

Aufgabe 2: Zeigen Sie mit Hilfe der MacLaurin Reihen von e^x, $\sin x$, und $\cos x$, dass gilt:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

(10 Punkte)

Aufgabe 3: Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = xe^{-y}$. Berechnen Sie die Richtungsableitung $D_{\vec{a}} f(\vec{r})$ an der Stelle $\vec{r} = (x, y) = (1, 0)$ in Richtung des Einheitsvektors $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ auf zwei Arten, nämlich

(a) mit Hilfe des Gradienten $\vec{\nabla} f$ und

(b) über den Differentialquotienten

$$D_{\vec{a}} f(\vec{r}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{r} + h\vec{a}) - f(\vec{r})}{h}$$

(10 Punkte)

Aufgabe 4: Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = x^2 - \cos y$$

auf mögliche Extremstellen und charakterisieren Sie diese mit Hilfe der Determinante der Hesse-Matrix.

(10 Punkte)

Aufgabe 5: Die Koordinaten (x_s, y_s) des Schwerpunkts einer Fläche mit einer homogenen Massendichte berechnen sich aus folgenden Zweifachintegralen:

$$x_s = \frac{1}{A} \iint_A x \cdot dxdy, \qquad y_s = \frac{1}{A} \iint_A y \cdot dxdy$$

Berechnen Sie (a) den Flächeninhalt A sowie (b) die Koordinaten des Schwerpunkts (x_s, y_s) der Fläche, die von den Kurven $y_1(x) = 0$ und $y_2(x) = \sin x$ zwischen $x = 0$ und $x = \pi$ eingeschlossen wird. Fertigen Sie auch eine Skizze des Integrationsgebiets an.

(10 Punkte)

Gutes Gelingen!

42 – 48 Punkte	...	Sehr Gut
36 – 41 Punkte	...	Gut
30 – 35 Punkte	...	Befriedigend
24 – 29 Punkte	...	Genügend
0 – 23 Punkte	...	Nicht Genügend