VO-Prüfung
Differential- und Integralrechnung
26.9.2013 – Gruppe A

Name: Matrikelnummer:

◯ KF-UNI ◯ TU-Graz

Aufgabe 1: (a) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden unendlichen Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2n\cos(n\pi)}{n^2}$$

Erklären Sie dabei Ihre Vorgehensweise. Hinweis: Sie können die Konvergenz der sogenannte Teleskopreihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$ voraussetzen.

(8 Punkte)

Aufgabe 2: Berechnen Sie die MacLaurin Reihe der Funktion $f(x) = (1-\sin x)^2$ bis inklusive Terme der Ordnung x^3 auf zwei Arten:
(a) Mit Hilfe der Formel von MacLaurin für $f(x)$ und
(b) indem Sie die MacLaurin Reihe von $\sin x$ in die Funktion $f(x)$ einsetzen.

(8 Punkte)

Aufgabe 3: Berechnen Sie alle Wurzeln z der folgenden komplexen Gleichung $z^4 = \sin(i\pi)$ und stellen Sie diese graphisch in der komplexen Ebene dar.

(8 Punkte)

Aufgabe 4: Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = x^2(y-2)^2$. Berechnen Sie die Richtungsableitung $D_{\vec{a}}f(\vec{r})$ an der Stelle $\vec{r} = (x, y) = (1, 0)$ in Richtung des Einheitsvektors $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ auf zwei Arten, nämlich

(a) mit Hilfe des Gradienten $\vec{\nabla} f$ und

(b) mit Hilfe des Differentialquotienten

$$D_{\vec{a}}f(\vec{r}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{r} + h\vec{a}) - f(\vec{r})}{h}$$

(8 Punkte)

Aufgabe 5: Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = x^2 - \cos y$$

auf mögliche Extremstellen und charakterisieren Sie diese mit Hilfe der Determinante der Hesse-Matrix.

(8 Punkte)

Aufgabe 6: Die Koordinaten (x_s, y_s) des Schwerpunkts einer Fläche mit einer homogenen Massendichte berechnen sich aus folgenden Zweifachintegralen:

$$x_s = \frac{1}{A} \iint_A x \cdot dxdy, \qquad y_s = \frac{1}{A} \iint_A y \cdot dxdy$$

Berechnen Sie (a) den Flächeninhalt A sowie (b) die Koordinaten des Schwerpunkts (x_s, y_s) der Fläche, die von den Kurven $y_1(x) = 0$ und $y_2(x) = \sin x$ zwischen $x = 0$ und $x = \pi$ eingeschlossen wird. Fertigen Sie auch eine Skizze des Integrationsgebiets an.

(8 Punkte)

Gutes Gelingen!

0 – 23 Punkte	...	Nicht Genügend
24 – 29 Punkte	...	Genügend
30 – 35 Punkte	...	Befriedigend
36 – 41 Punkte	...	Gut
42 – 48 Punkte	...	Sehr Gut