VO-Prüfung
Differential- und Integralrechnung
5.6.2013 – Gruppe A

Name: Matrikelnummer:

◯ KF-UNI ◯ TU-Graz

Aufgabe 1: (a) Zeigen Sie mithilfe von vollständiger Induktion, dass für die n-te Partialsumme s_n der sogenannten Teleskopreihe gilt:

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = 1 - \frac{1}{n}$$

(b) Berechnen Sie weiters den Grenzwert der unendlichen Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k}$.

(8 Punkte)

Aufgabe 2: (a) Erklären Sie das Wurzelkriterium für Reihen anhand der untenstehenden Potenzreihe und bestimmen Sie deren Konvergenzradius.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-3)^k}{2k}$$

(b) Untersuchen Sie weiters das Konvergenzverhalten an den Rändern des Konverenzgebietes.

(8 Punkte)

Aufgabe 3: Berechnen Sie alle Wurzeln der Gleichung $(z-i)^4 = -i$ und stellen Sie diese graphisch in der Komplexen Ebene dar.

(8 Punkte)

Aufgabe 4: Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = x \sin y$. Berechnen Sie die Richtungsableitung $D_{\vec{a}} f(\vec{r})$ an der Stelle $\vec{r} = (x,y) = (1,0)$ in Richtung des Einheitsvektors $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ auf zwei Arten, nämlich

(a) mit Hilfe des Gradienten $\vec{\nabla} f$ und

(b) mit Hilfe des Differentialquotienten

$$D_{\vec{a}} f(\vec{r}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{r} + h\vec{a}) - f(\vec{r})}{h}$$

(8 Punkte)

Aufgabe 5: (a) Erklären Sie die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren, um die Extremwerte einer Funktion $f(x,y,z)$ unter den zwei Nebenbedingungen $\phi_1(x,y,z) = 0$ und $\phi_2(x,y,z) = 0$ zu bestimmen. (b) Berechnen Sie den Extremwert der Funktion $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ unter der Nebenbedingung $\phi(x,y,z) = 2x + y - z + 3 = 0$.

(8 Punkte)

Aufgabe 6: (a) Was versteht man unter einem uneigentlichen Integral? Welche zwei Arten von uneigentlichen Integralen kann man unterscheiden? Geben Sie je ein Beispiel an. (b) Für welche reellen Werte von β und γ existieren die folgenden beiden uneigentlichen Integrale und welches Ergebnis erhalten Sie für die Integrale I_1 und I_2?

$$I_1 = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{1+\beta}}, I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\gamma}}$$

(8 Punkte)

Gutes Gelingen!

0 – 23 Punkte	...	Nicht Genügend
24 – 29 Punkte	...	Genügend
30 – 35 Punkte	...	Befriedigend
36 – 41 Punkte	...	Gut
42 – 48 Punkte	...	Sehr Gut