VO-Prüfung
Differential- und Integralrechnung
28.2.2013 – Gruppe A

Name: Matrikelnummer:

◯ KF-UNI ◯ TU-Graz

Aufgabe 1: (a) Erklären Sie die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren, um die Extremwerte einer Funktion $f(x, y, z)$ unter den zwei Nebenbedingungen $\phi_1(x, y, z) = 0$ und $\phi_2(x, y, z) = 0$ zu bestimmen. (b) Berechnen Sie den Extremwert der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ unter der Nebenbedingung $\phi(x, y, z) = x - 2y - 2z - 3 = 0$.

(8 Punkte)

Aufgabe 2: (a) Was versteht man unter totaler Differenzierbarkeit einer Funktion $f(x, y)$ mit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$? (b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6+y^5}{x^4+y^4} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

an der Stelle $(x, y) = (0, 0)$ nicht total differenzierbar ist. (c) Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x, y)$ und deren erste partielle Ableitungen entlang der Koordinatenachsen $y = 0$ bzw. $x = 0$.

(8 Punkte)

Aufgabe 3: (a) Was besagt das Leibniz-Kriterium in Bezug auf die Konvergenz einer unendlichen Reihe? Welche Voraussetzungen müssen für dessen Anwendung erfüllt sein? (b) Überprüfen Sie die Konvergenz der folgenden Reihe:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \cos(n\pi) \frac{e^n}{n!}$$

(8 Punkte)

Aufgabe 4: Berechnen Sie alle Wurzeln der Gleichung $(z-i)^3 = i$ und stellen Sie diese graphisch in der komplexen Ebene dar.

(6 Punkte)

Aufgabe 5: Zeigen Sie mit Hilfe der MacLaurin Reihen von e^x, $\sin x$, und $\cos x$, dass gilt:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

(8 Punkte)

Aufgabe 6: (a) Was versteht man unter einem uneigentlichen Integral? Welche zwei Arten von uneigentlichen Integralen kann man unterscheiden? Geben Sie je ein Beispiel an. (b) Berechnen Sie weiters folgendes uneigentliche Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Hinweis zu (b): Beachten Sie, dass das Quadrat des gesuchten Integrals aus folgendem zweidimensionalen Integral bestimmt werden kann

$$I^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy\right] = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy,$$

das man nach Transformation auf Polarkoordinaten ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) und anschließender Variablensubstitution berechnen kann:

(10 Punkte)

Gutes Gelingen!

0 – 23 Punkte	...	Nicht Genügend
24 – 29 Punkte	...	Genügend
30 – 35 Punkte	...	Befriedigend
36 – 41 Punkte	...	Gut
42 – 48 Punkte	...	Sehr Gut