

VO-Prüfung
Differential- und Integralrechnung
5.2.2013 – Gruppe B

Name:

Matrikelnummer:

KF-UNI

TU-Graz

Aufgabe 1: Zeigen Sie mithilfe des Integraltests, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, und fertigen Sie eine Skizze an, die Ihre Vorgehensweise erklärt.

(6 Punkte)

Aufgabe 2: Betrachten Sie die Funktion $f(x, y) = (x - 1)^2 + e^{-y}$ und skizzieren Sie deren Verlauf entlang der Koordinatenachsen x und y , also $f(x, 0)$ und $f(0, y)$. Hat diese Funktion $f(x, y)$ ein lokales Extremum?

(6 Punkte)

Aufgabe 3: Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = ye^{-x}$. Berechnen Sie die Richtungsableitung $D_{\vec{a}}f(\vec{r})$ an der Stelle $\vec{r} = (x, y) = (0, 1)$ in Richtung des Einheitsvektors $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$ auf zwei Arten, nämlich

- (a) mit Hilfe des Gradienten $\vec{\nabla}f$ und
- (b) über den Differentialquotienten

$$D_{\vec{a}}f(\vec{r}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{r} + h\vec{a}) - f(\vec{r})}{h}$$

(8 Punkte)

Aufgabe 4: Berechnen Sie folgenden Grenzwert und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$$

(6 Punkte)

Aufgabe 5: Berechnen Sie alle Wurzeln der Gleichung $z^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i-1)$ und stellen Sie diese graphisch in der Komplexen Ebene dar.

(6 Punkte)

Aufgabe 6: Berechnen Sie die MacLaurin Reihe der Funktion $f(x) = (e^x - 1)^2$ bis inklusive Terme der Ordnung x^3 auf zwei Arten:

- (a) Mit Hilfe der Formel von MacLaurin für $f(x)$ und
- (b) indem Sie die MacLaurin Reihe von e^x in die Funktion $f(x)$ einsetzen.

(6 Punkte)

Aufgabe 7: Das Trägheitsmoment I eines Körpers mit der homogenen Massendichte ρ_0 berechnet sich aus folgendem Dreifachintegral:

$$I = \rho_0 \iiint_V dV r_{\perp}^2$$

wobei r_{\perp} den Normalabstand des Volumenelements dV von der Drehachse bezeichnet. Schreiben Sie dieses Dreifachintegral für eine Kugel mit Radius R bezüglich einer Drehung um den Mittelpunkt in (a) Kartesischen Koordinaten, (b) in Zylinderkoordinaten, und (c) in Kugelkoordinaten an, wobei Sie jeweils auf die korrekte Angabe der Integralgrenzen und r_{\perp}^2 sowie der Reihenfolge der Integrationen achten sollten. (d) Werten Sie anschließend das Integral in *einem* Koordinatensystem Ihrer Wahl aus.

(10 Punkte)

Gutes Gelingen!

0 – 23 Punkte	...	Nicht Genügend
24 – 29 Punkte	...	Genügend
30 – 35 Punkte	...	Befriedigend
36 – 41 Punkte	...	Gut
42 – 48 Punkte	...	Sehr Gut