

1 Bob der Brückenmeister: Lösungen

- (a) (1 Punkt) Schreibe die infinitesimale Bogenlänge ds als Funktion von dx und $y'(x)$. Hierbei ist $y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$.

Lösung:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\ &= dx^2 (1 + y'^2) \\ ds &= dx \sqrt{1 + y'^2} \end{aligned}$$

- (b) (2 Punkte) In Ruhelage heben sich die Kräfte, die auf ein infinitesimales Massenelement dm wirken, in x - und y -Richtung jeweils gegenseitig auf. Stelle damit die Formeln für die Seilkraft in x -Richtung und für die Ableitungen der Seilkraft in y -Richtung auf. Nutze dafür die Formel aus (a).

Lösung:

Da das Seil eine homogene Massenverteilung besitzt können wir $dm = \frac{ds}{L}m = ds\rho$ schreiben. Damit gilt

$$\begin{aligned} F_x(x + dx) - F_x(x) &= 0 \\ F_x &= \text{const.} \\ F_y(x + dx) - F_y(x) - gdm &= 0 \\ F_y(x + dx) - F_y(x) &= g\rho ds \\ F_y(x + dx) - F_y(x) &= g\rho dx \sqrt{1 + y'^2} \\ F_y'(x) &= g\rho \sqrt{1 + y'^2}. \end{aligned}$$

- (c) (2 Punkte) In welcher Beziehung steht die Seilkraft zum Seil? Welche Relation lässt sich daraus ableiten? Nutze diese um einen weiteren Ausdruck für die Ableitung der Seilkraft in y -Richtung zu erhalten und setze diesen mit dem aus (b) gleich um die Differentialgleichung zweiter Ordnung zu erhalten.

Lösung:

Wenn φ der Winkel zwischen Tangentialvektor und x -Richtung ist, so kann sehen, dass

$$\begin{aligned} \tan(\varphi) &= \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{F_y(x)}{F_x} \\ F_y(x) &= F_x y' \\ F_y'(x) &= F_x y''. \end{aligned}$$

Vergleicht man dies mit der Lösung aus (b), so erhält man

$$\begin{aligned} F_x y'' &= g\rho\sqrt{1+y'^2} \\ y'' &= \frac{g\rho}{F_x}\sqrt{1+y'^2} \\ &= A\sqrt{1+y'^2}. \end{aligned}$$

(d) (3 Punkte) Löse die Differentialgleichung zweiter Ordnung.

$$\begin{aligned} z(x) &= y'(x) \\ z' &= A\sqrt{1+z^2} \\ \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \frac{dz}{dx} &= A \\ \operatorname{arcsinh}(z) &= Ax + B \\ z &= \sinh(Ax + B) \\ y &= \frac{1}{A} \cosh(Ax + B) + C \end{aligned}$$

Wobei wir das Integral gelöst haben indem wir

$$\begin{aligned} z &= \sinh(u) \\ dz &= \cosh(u) du \\ \sqrt{1+z^2} &= \sqrt{1+\sinh^2(u)} \\ &= \cosh(u) \\ \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} &= \int \frac{\cosh(u)}{\cosh(u)} du \\ &= u \\ &= \operatorname{arcsinh}(z) \end{aligned}$$

(e) (2 Punkte) Berechne $L(x_0)$

$$\begin{aligned} L &= \int ds \\ &= \int_{-x_0/2}^{x_0/2} dx \sqrt{1+y'^2} \\ &= \int_{-x_0/2}^{x_0/2} dx \sqrt{1+\sinh(Ax+B)^2} \\ &= \frac{1}{A} \sinh(Ax_0/2+B) - \frac{1}{A} \sinh(-Ax_0/2+B) \end{aligned}$$

- (f) (3 Punkte) Berechne die Kraft in x -Richtung $F_x(L, x_0)$ für den Fall, dass das Seil fast vollständig gespannt ist und für $y(-x_0/2) = 0$ und $y(x_0/2) = 0$. Nimm dazu an, dass die Seilkraft in x -Richtung größer ist als die Gewichtskraft.

$$y(-x_0/2) = \frac{1}{A} \cosh(-Ax_0/2 + B) + C$$

$$y(x_0/2) = \frac{1}{A} \cosh(Ax_0/2 + B) + C$$

Subtrahiert man die Gleichung sieht man, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{A} \cosh(Ax_0/2 + B) - \frac{1}{A} \cosh(-Ax_0/2 + B) \\ &\rightarrow B = 0, \end{aligned}$$

was man folgern kann, da $\cosh(-x) = \cosh(x)$. Daher gilt für die L

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{A} \sinh(Ax_0/2) - \frac{1}{A} \sinh(-Ax_0/2) \\ &= \frac{2}{A} \sinh(Ax_0/2) \\ &\approx \frac{2}{A} \left(\frac{Ax_0}{2} + \frac{A^3 x_0^3}{8 \cdot 6} \right) \\ &= x_0 \left(1 + \frac{A^2 x_0^2}{24} \right) \\ A &= \sqrt{\left(\frac{L}{x_0} - 1 \right) \frac{24}{x_0^2}} \\ F_x &= \frac{x_0 \rho g}{\sqrt{24 \left(\frac{L}{x_0} - 1 \right)}} \end{aligned}$$

2 Kernfusion: Bewegung geladener Teilchen im Tokamak: Lösungen

Die Bewegungsgleichungen des Teilchens sind durch

$$m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{F}, \quad (1)$$

bestimmt.

- (a) (3 Punkte) Nun wollen wir die vollständige Lösung des Problems bestimmen. Hierfür wählen wir unser Koordinatensystem so, dass $\mathbf{F} = F_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_x$ und $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{e}}_z$. Nun können wir letzteres in Gleichung 1 einsetzen. Löse dieses System an linearen Differentialgleichungen erster Ordnung. Als Ansatz für die homogene Lösung eignet sich $v_x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, $v_y(t) = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)$ und $v_z(t) = \text{const.}$, vergiss die partikuläre Lösung jedoch nicht!

Lösung:

$$m \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{\perp} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$m \dot{v}_x = q v_y B + F$$

$$m \dot{v}_y = -q v_x B$$

$$m \dot{v}_z = 0 \rightarrow v_z = \text{const.}$$

Wir leiten nochmal ab und erhalten

$$m \ddot{v}_x = q \dot{v}_y B$$

$$= -\frac{q^2 B^2}{m} v_x$$

$$0 = \ddot{v}_x + \frac{q^2 B^2}{m^2} v_x$$

$$v_x = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t),$$

with $\omega = \frac{qB}{m}$.

$$m \ddot{v}_y = -q \dot{v}_x B$$

$$-\frac{m}{qB} \ddot{v}_y = \dot{v}_x$$

$$= \frac{qB}{m} v_y + \frac{F}{m}$$

$$v_{yh} = c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t)$$

$$v_{yp} = -\frac{F_{\perp}}{qB},$$

wobei wir die partikuläre Lösung mittels eines Polynomansatzes gefunden haben. Um die Konstanten in Verbindung zu bringen nutzen wir

$$\begin{aligned}\dot{v}_y &= -\omega v_x \\ \omega(-c \sin(\omega t) + d \cos(\omega t)) &= -\omega(a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) \\ \rightarrow a &= -d \\ \rightarrow b &= c.\end{aligned}$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned}v_x &= a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \\ v_y &= b \cos(\omega t) - a \sin(\omega t) - \frac{F_\perp}{qB}.\end{aligned}$$

- (b) (2 Punkte) Löse die Bewegungsgleichungen für die Anfangsbedingungen $\mathbf{v}(0) = (0, v_g - F_\perp/(qB), v_\parallel)$ und $\mathbf{r}(0) = (0, 0, 0)$. Mache außerdem eine qualitative Skizze der Kreisbahnen der Elektronen und Ionen. Was ist deren (Gyrations)radius ρ ?

Lösung:

$$\begin{aligned}v_x(0) &= 0 \rightarrow a = 0 \\ v_y(0) &= v_g - \frac{F_\perp}{qB} \rightarrow c = v_g \\ v_z(0) &= v_\parallel \rightarrow v_z = v_\parallel \\ v_x &= v_g \sin(\omega t) \\ v_y &= v_g \cos(\omega t) - \frac{F_\perp}{qB} \\ x &= \frac{v_g}{\omega} (1 - \cos(\omega t)) \\ y &= \frac{v_g}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{F_\perp}{qB} t \\ z &= v_\parallel t.\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass der Gyrationsradius $v_g/\omega = \frac{mv_g}{qB}$. Die Elektronen gyrieren also mit einem kleineren Radius als die Ionen ($m_e < m_p$). Zusätzlich geht der Drift die entgegengesetzte Orientierung.

- (c) (1 Punkte) Interpretiere die homogene und partikuläre Lösung.

Lösung:

Die homogene Lösung beschreibt das Gyrieren der Teilchen um die Magnetfeldlinie. Die partikuläre Lösung den Drift der durch externe Kräfte (die normal auf das Magnetfeld stehen) entsteht. Allgemein gilt daher $\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{qB^2}$.

Wir nennen von nun an den xy -Anteil der homogenen Lösung \mathbf{v}_g und die partikuläre Lösung \mathbf{v}_D , oft Driftgeschwindigkeit genannt. Unsere Lösung für \mathbf{v}_z wird im allgemeinen Fall \mathbf{v}_\parallel genannt.

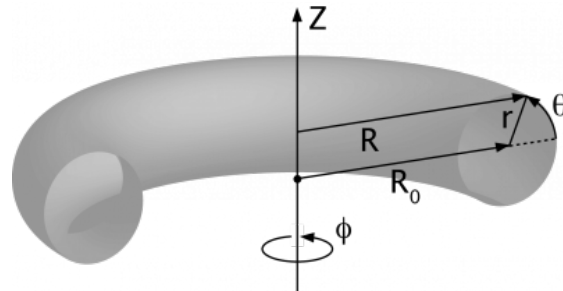


Abbildung 1: Skizze von unserem Koordinatensystem.

- (d) (1 Punkte) Für unseren Tokamak wollen wir wissen, wie sich Teilchen verhalten, die sich entlang von $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{e}}_\phi$ mit einem Krümmungsradius von R bewegen. Zu welchem Drift führt die dadurch entstehende Fliehkraft \mathbf{F}_{zf} ? Was passiert dadurch mit den positiv und negativ geladenen Teilchen?

Lösung:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{zf} &= \frac{mv_\parallel^2}{R}\hat{\mathbf{e}}_R \\ \mathbf{v}_D &= \frac{\mathbf{F}_{zf} \times \mathbf{B}}{qB^2} \\ &= \frac{mv_\parallel^2}{RqB}\hat{\mathbf{e}}_z\end{aligned}$$

- (e) (2 Punkte) Wir führen nun eine Magnetfeldkomponente in z -Richtung ein. Daher ist $\mathbf{B} = B_\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi + B_z\hat{\mathbf{e}}_z$. Bestimme das passende Verhältnis von B_z zu B_ϕ für ein Elektron mit einer Geschwindigkeit von v_\parallel , um $v_z = 0$ zu erhalten. Damit ist sichergestellt, dass die Teilchen im Reaktor bleiben. Möglicherweise hilfreich: $B_z \ll B_\phi$ und $B_\phi \approx B$.

Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{B_z}{B_\phi} &= \frac{v_z}{v_\phi} \\ v_z &= v_\phi \frac{B_z}{B_\phi} \\ &\approx v_\parallel \frac{B_z}{B_\phi}\end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit in z -Richtung ist daher die Summe von v_z und v_D . Damit sie Null ist muss daher

$$0 = v_{\parallel} \frac{B_z}{B_{\phi}} + \frac{mv_{\parallel}^2}{RqB}$$

$$\frac{B_z}{B_{\phi}} = -\frac{mv_{\parallel}}{RqB}$$

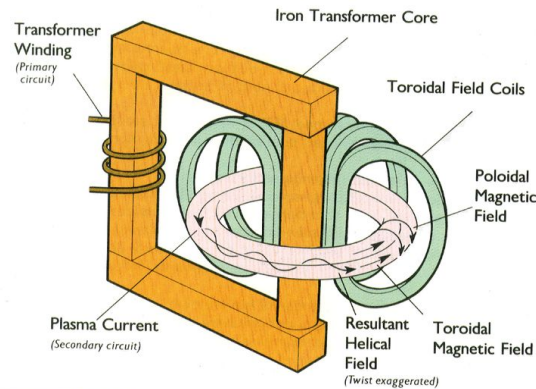


Abbildung 2: Schematischer Aufbau eines Tokamak.

- (f) (4 Punkte) Dieser *quick fix* funktioniert leider nur für Teilchen mit einer bestimmten Geschwindigkeit. Es gibt jedoch auch eine noch bessere Lösung. Hierfür nehmen wir an, dass nun $\mathbf{B} = B_{\phi}\hat{\mathbf{e}}_{\phi} + B_{\theta}\hat{\mathbf{e}}_{\theta}$. Die Magnetfeldlinien winden sich daher um den Torus, siehe Abbildung 2. Man kann zeigen dass die Bewegungsgleichungen durch

$$r \frac{d\theta}{dt} \approx \frac{B_{\theta}}{B} v_{\parallel} + v_D \cos(\theta)$$

$$\frac{dr}{dt} \approx v_D \sin(\theta)$$
(2)

gegeben sind. Löse für $r(\theta)$. Verwende dafür $\frac{Bv_D}{B_{\theta}v_{\parallel}} \ll 1$ um zu zeigen, dass $r(\theta)$ zwischen zwei Umkehrpunkten oszilliert und die Teilchen daher im Tokamak bleiben!

Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{v_D \sin(\theta)}{\frac{B_\theta v_\parallel}{B} + v_D \cos(\theta)} \\
&= \frac{\sin(\theta)}{\frac{B_\theta v_\parallel}{B v_D} + \cos(\theta)} \\
&\approx \frac{B v_D}{B_\theta v_\parallel} \sin(\theta) \\
\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) &= -\frac{B v_D}{B_\theta v_\parallel} \cos(\theta) \\
r &= r_0 \exp\left(-\frac{B v_D}{B_\theta v_\parallel} \cos(\theta)\right),
\end{aligned}$$

Da $\frac{B v_D}{B_\theta v_\parallel} \ll 1$ ist. Die Teilchen oszillieren also zwischen $r_0 \exp\left(-\frac{B v_D}{B_\theta v_\parallel}\right)$ und $r_0 \exp\left(\frac{B v_D}{B_\theta v_\parallel}\right)$ beziehungsweise $r_0 \pm r_0 \frac{B v_D}{B_\theta v_\parallel}$.

3 Gezeiten: Lösungen

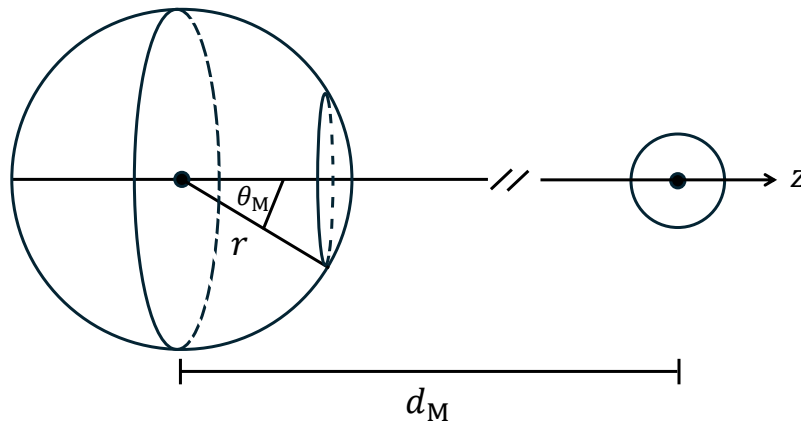


Abbildung 3: Skizze unseres Koordinatensystems.

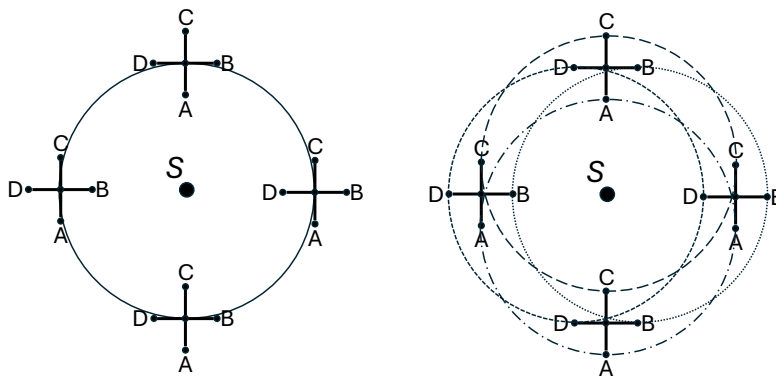


Abbildung 4: Schematische Skizze von einer Revolution ohne Rotation. Links: Ein starres Kreuz kreist um S , der Verlauf des Massenmittelpunkts ist skizziert. Rechts: Die Verläufe Eckpunkte des Kreuzes sind skizziert. Sie durchlaufen Kreise mit dem gleichen Radius.

- (a) (1 Punkt) Auf den mond nächsten Punkt der Erdoberfläche wirkt eine stärkere Gravitationskraft als auf den Erdmittelpunkt. Bestimme die Differenz dieser Kräfte und zeige, dass man sie näherungsweise als

$$F_{\text{gra}}(d_M - R_E) - F_{\text{gra}}(d_M) \approx \frac{2GM_M m R_E}{d_M^3} \quad (3)$$

schreiben kann.

Lösung:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{GM_M m}{(d_M - R_E)^2} - \frac{GM_M m}{d_M^2} \\
 &= \frac{GM_M m}{d_M^2 (1 - R_E/d_M)^2} - \frac{GM_M m}{d_M^2} \\
 &\approx \frac{GM_M m}{d_M^2} \left(1 + 2 \frac{R_E}{d_M} \right) - \frac{GM_M m}{d_M^2} \\
 &= \frac{2GM_M m R_E}{d_M^3}
 \end{aligned}$$

Mittels der Taylorreihenentwicklung

$$(x - 1)^\alpha = 1 - \alpha x \dots$$

- (b) (2 Punkte) Nutze den Fakt, dass sich die Fliehkraft durch die Revolution ohne Rotation (RoR), siehe Abbildung 4, und die Gravitationskraft durch den Mond im Massenmittelpunkt aufheben. Daher ist die Fliehkraft der RoR an jedem Punkt auf der Erde im Betrag gleich der Gravitationskraft des Mondes im Massenmittelpunkt der Erde, zeigt aber in die entgegengesetzte Richtung. Zeige, dass $-\nabla\Phi_{Zf}$ die Zentrifugalkraft der RoR ist. Hierbei ist

$$\Phi_{Zf} = \frac{GM_M m}{d_M^2} r \cos(\theta_M), \quad (4)$$

das zugehörige Potential der RoR.

Lösung:

Der Massenmittelpunkt der Erde ist im Kräftegleichgewicht, die Gravitationskraft des Mondes und der die Fliehkraft der RoR sind daher

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{\text{gra}} + \mathbf{F}_{\text{zf}} &= 0 \\
 \mathbf{F}_{\text{zf}} &= -\mathbf{F}_{\text{gra}} \\
 &= -\frac{GM_M m}{d_M^2} \hat{\mathbf{e}}_z
 \end{aligned}$$

Wenn wir uns Abbildung 3 anschauen sehen wir, dass

$$\begin{aligned}
 -\nabla\Phi_{Zf} &= -\nabla \frac{GM_M m}{d_M^2} r \cos(\theta_M) \\
 &= -\nabla \frac{GM_M m}{d_M^2} z \\
 &= -\frac{GM_M m}{d_M^2} \hat{\mathbf{e}}_z.
 \end{aligned}$$

- (c) (5 Punkte) Das Gezeitenpotential des Mondes $\Phi_M = \Phi_{\text{gra}} + \Phi_{\text{Zf}}$, wobei Φ_{gra} das Potentials durch die Gravitation den Mondes ist. Expandiere dieses um zu zeigen, dass näherungsweise

$$\Phi_M(\theta_M, r) \approx -\frac{GM_M m}{d_M} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{r^2}{d_M^2} (3 \cos(2\theta_M) + 1) \right] \quad (5)$$

gilt. Nutze dafür $\cos(x)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$ und vernachlässige Terme die mit $(\frac{r}{d_M})^4$ oder höher Ordnung skalieren.

Lösung:

Der Abstand l vom Massenmittelpunkt des Mondes bis zu einem Punkt auf der Erdoberfläche bei (r, θ_M) kann man schreiben als

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{r^2 \sin^2(\theta_M) + (d_M - r \cos \theta_M)^2} \\ &= \sqrt{r^2 + d_M^2 - 2d_M r \cos(\theta_M)} \\ &= d_M \sqrt{1 + r^2/d_M^2 - 2r \cos(\theta_M)/d_M} \\ &= d_M \sqrt{1 + \Delta} \\ \Phi_{\text{gra}} &= -\frac{GM_M m}{l} \\ &= -\frac{GM_M m}{d_M \sqrt{1 + \Delta}} \\ &\approx -\frac{GM_M m}{d_M} \left(1 - \frac{r^2}{2d_M^2} + \frac{2r \cos(\theta_M)}{2d_M} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) \frac{\Delta^2}{2} \right) \\ \Delta^2 &\approx \frac{4r^2 \cos^2(\theta_M)}{d_M^2} \\ \Phi_{\text{gra}} &\approx -\frac{GM_M m}{d_M} \left(1 - \frac{r^2}{2d_M^2} + \frac{r \cos(\theta_M)}{d_M} + \frac{3r^2 \cos^2(\theta_M)}{2d_M^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_M(\theta_M, r) &= \Phi_{\text{gra}} + \Phi_{\text{Zf}} \\ &\approx -\frac{GM_M m}{d_M} \left(1 - \frac{r^2}{2d_M^2} + \frac{r \cos(\theta_M)}{d_M} + \frac{3r^2 \cos^2(\theta_M)}{2d_M^2} \right) + \frac{GM_M m}{d_M^2} r \cos(\theta_M) \\ &= -\frac{GM_M m}{d_M} \left[1 + \frac{r^2}{2d_M^2} (3 \cos^2(\theta_M) - 1) \right] \\ &= -\frac{GM_M m}{d_M} \left[1 + \frac{r^2}{4d_M^2} (3 \cos(2\theta_M) + 1) \right]. \end{aligned}$$

Wobei wir Taylorreiheentwicklungen genutzt haben und Terme die mit $(\frac{r}{d_M})^4$ oder höher Ordnung skalieren weggelassen haben.

Der Wasserstand des Meeres wird durch das Gezeitenpotential, $\Phi_G(\theta_M, \theta_S, r) = \Phi_M(\theta_M, r) + \Phi_S(\theta_S, r)$ etwas verändert, wobei $\Phi_S(\theta_S, r)$ das Gezeitenpotential der Sonne ist. Die Änderung der Höhe, also die Abweichung vom durchschnittlichen Meeresspiegel, nennen wir $h(\theta_M, \theta_S, r)$.

- (d) (1 Punkt) In welchem Verhältnis steht $h(\theta_M, \theta_S, r)$ zu Φ_G ? Hinweis: Die Meeresoberfläche ist eine Equipotentialfläche.

Lösung:

Die Equipotentialfläche ändert sich um mgh . Nachdem wir den Nullpunkt des Gezeitenpotentials in den Massenmittelpunkt der Erde gelegt haben, können wir daher für $r = R_E$ schreiben, dass

$$0 = mgh(\theta_M, \theta_S, R_E) + \Phi_M(\theta_M, R_E) + \Phi_S(\theta_S, R_E)$$

$$h(\theta_M, \theta_S) = \frac{GM_M}{d_{Mg}} \frac{R_E^2}{4d_M^2} (3 \cos(2\theta_M) + 1) + \frac{GM_S}{d_{Sg}} \frac{R_E^2}{4d_S^2} (3 \cos(2\theta_S) + 1)$$

- (e) (2 Punkte) Skizziere die Konstellationen für die die Flut maximal bzw minimal ist. Was ist das Verhältnis dieser beiden Fluthöhen?

Lösung:

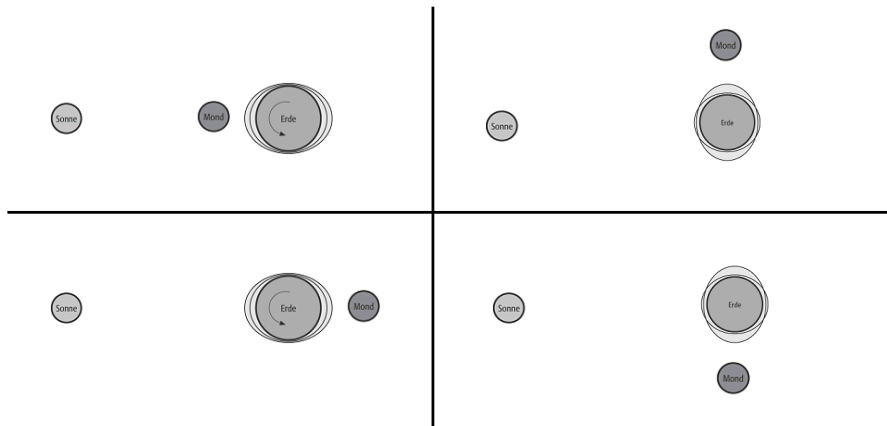


Abbildung 5: Konstellationen für eine Springflut, links, und eine Nippflut, rechts.

$$\frac{h(\theta_M = 0^\circ, \theta_S = 0^\circ)}{h(\theta_M = 0^\circ, \theta_S = 90^\circ)} = 1.9$$

- (f) (2 Punkte) Wir nutzen das Mittelmeer als Gezeitenkraftwerk. Nimm an, dass du die potentielle Energie des Höhenunterschiedes in beide Richtungen mit einem

Wirkungsgrad von 0.5 nutzen kannst. Ignoriere den Einfluss der Sonne. Die Fläche des Mittelmeeres umfasst 2.5 Millionen km^2 . Wie viel GW Leistung hat unser Mittelmeerkraftwerk?

Lösung:

Der zeitliche Abstand zwischen Ebbe und Flut beträgt zirka 6 Stunden. Entweder befüllen wir unser Kraftwerk zur Flutzeit oder, 6 Stunden später, lassen das Wasser zu Ebbe aus dem Kraftwerk fließen. Der Tidenhub h_T , der Höhenunterschied zwischen Ebbe und Flut, beträgt durch den Mond 0.54 m. Die Höhe um die sich der Massenmittelpunkt beim Benutzen des Kraftwerkes ändert ist jedoch nur $h_T/2$. Daher haben wir eine Leistung von

$$L = \frac{0.5\rho Ah_Tgh_T}{2 * 6 * 3600}$$
$$\approx 81 \text{ GW.}$$

4 A glimpse on quantum cryptography: Solutions

1) Most easily by direct inspection:

$$(\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{e}_u)|\sigma_u = +1\rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos(\theta/2) + \sin \theta \sin(\theta/2) \\ \sin \theta \cos(\theta/2) - \cos \theta \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} (\cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)) \cos(\theta/2) + 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \\ 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \cos(\theta/2) - (\cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)) \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos^3(\theta/2) + \sin^2(\theta/2) \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \cos^2(\theta/2) + \sin^3(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (10)$$

And similarly for the other eigenvector.

The probability for finding eigenvalue $\frac{\hbar}{2}$ is $p_u^+ = |\langle \sigma_u = +1 | \sigma_z = +1 \rangle|^2 = \cos^2(\theta/2)$, and the system is afterwards in state $|\sigma_u = +1\rangle$. The probability for finding eigenvalue $-\frac{\hbar}{2}$ is $p_u^- = |\langle \sigma_u = -1 | \sigma_z = +1 \rangle|^2 = \sin^2(\theta/2)$, and the system is afterwards in state $|\sigma_u = -1\rangle$.

2) First possibility: We had $|\sigma_u = +1\rangle$ after the first measurement. If we want to go back to $|\sigma_z = +1\rangle$, we get the probability $p_z^+ = |\langle \sigma_z = +1 | \sigma_u = +1 \rangle|^2 = \cos^2(\theta/2)$. The total probability for this path is $p_1 = p_u^+ p_z^+ = \cos^4(\theta/2)$.

Second possibility: We had $|\sigma_u = -1\rangle$ after the first measurement. Now we get $p_z^+ = |\langle \sigma_z = +1 | \sigma_u = -1 \rangle|^2 = \sin^2(\theta/2)$. This path gives probability $p_1 = p_u^- p_z^+ = \sin^4(\theta/2)$.

Since the two paths are additive, the total probability to get $|\sigma_z = +1\rangle$ back after the second measurement is $P_{++}(\theta) = \cos^4(\theta/2) + \sin^4(\theta/2) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2(\theta))$.

3) Gives the same probability as before, $P_{--} = P_{++}$.

4) The identities can be inverted to $|\sigma_z = \pm 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\sigma_x = +1\rangle \pm |\sigma_x = -1\rangle)$. Inserting this into the spin state above, and multiplying out all tensor products, we arrive immediately at:

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\sigma_x^a = +1\rangle \otimes |\sigma_x^b = +1\rangle + |\sigma_x^a = -1\rangle \otimes |\sigma_x^b = -1\rangle \right) \quad (11)$$

That means it has both in z and in x projection the same form.

5) Alice measures either $+\frac{\hbar}{2}$ or $-\frac{\hbar}{2}$, irrespective of the axis. Since the state $|\chi\rangle$ has equal contributions from $|\sigma_z^a = +1\rangle$ and $|\sigma_z^a = -1\rangle$, the probabilities for the two states is the same, i.e. $p = 1/2$ for all possible measurements.

The states after the measurements are just the projections to the eigenstates:

$$z \text{ axis, } +\frac{\hbar}{2}: |\sigma_z^a = +1\rangle \otimes |\sigma_z^b = +1\rangle$$

$$z \text{ axis, } -\frac{\hbar}{2}: |\sigma_z^a = -1\rangle \otimes |\sigma_z^b = -1\rangle$$

$$x \text{ axis, } +\frac{\hbar}{2}: |\sigma_x^a = +1\rangle \otimes |\sigma_x^b = +1\rangle$$

$$x \text{ axis, } -\frac{\hbar}{2}: |\sigma_x^a = -1\rangle \otimes |\sigma_x^b = -1\rangle$$

- 6) If the two axes are the same, e.g. the z axis for Alice and Bob as in case (a), the results is straight forward. If Alice measures $+\frac{\hbar}{2}$, Bob measures also $+\frac{\hbar}{2}$ with probability $p = 1.0$, see first line above in point 5). If Alice measures $-\frac{\hbar}{2}$, Bob measures also $-\frac{\hbar}{2}$ with probability $p = 1.0$, see second line above.

If the two axis are different, it works as follows, e.g. for case (b): Alice measures along z axis. Irrespective of what she measures, the state for Bob is polarized along z . But Bob measures along x , that means he will get both possible measurements $\pm\frac{\hbar}{2}$ with equal possibility $p = 0.5$. This follows from $|\sigma_z = \pm 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\sigma_x = +1\rangle \pm |\sigma_x = -1\rangle)$

Case (c) is equivalent to case (b), and case (d) equivalent to case (a). That means that they will get the same results only if they measure in the same direction.

- 7) This is exactly what we have calculated before. One can interpret the spy as an intermediate measurement. The measurement of Alice prepares the spin for Bob in z direction. The spy measures in a different direction, and Bob again in z direction. According to our result above, the probability that Alice and Bob find the same result is $P(\theta_s) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta_s)$.
- 8) We have $P(0) = 1.0$ and $P(\pi/2) = 0.5$. If the spy chooses $\theta_s = 0$, i.e. z axis, or $\theta_s = \pi/2$, i.e. x axis, at random, the expectation value that Alice and Bob find the same value is $\bar{p} = 3/4$.
- 9) If Alice and Bob measure in the same direction, all results/measurements must be the same. If just a single result is different (in an ideal experimental setup), there must be a spy.
- 10) The only chance for the spy to remain invisible is that Alice and Bob always find the same result when they choose the same axis for measurement. For each pair of spins, there is a chance of $1/2$ that they choose the same axis in their measurement. From the expectation value above, the probability that the results of Alice and Bob differ is $1 - \bar{p} = 1/4$. Note that the spy is detected if the results differ, which occurs with total probability of $1/2 * 1/4 = 1/8$. With probability $7/8$ he remains invisible. On first sight, this looks very inefficient and insecure. But the spy needs to stay invisible for ALL pairs of spins in the subset N' . The probability that the spy remains undetected is therefore $(7/8)^{N'}$. For $N' = 200$ we get a probability of only $(7/8)^{200} \approx 2.5 \times 10^{-12}$ that the spy remains invisible.

5 Die Lichtgeschwindigkeit ist konstant, big deal? Lösungen

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \qquad t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right) \qquad (12)$$

$$x' = \gamma (x - vt) \qquad x = \gamma (x' + vt') \qquad (13)$$

$$y' = y \qquad y = y' \qquad (14)$$

$$z' = z \qquad z = z', \qquad (15)$$

Zum Zeitpunkt $t_1 = 0$ hat es die Position $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$. Zum Zeitpunkt $t_2 = \frac{1}{c} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$ die Position (x_2, y_2, z_2) .

- (a) (1 Punkt) Zeige für das Photon, dass es auch im gestrichenen Bezugssystem die Geschwindigkeit c besitzt.

Lösung:

$$\begin{aligned} t_2'^2 c^2 - x_2'^2 - y_2'^2 - z_2'^2 &= c^2 \gamma^2 \left(t_2 - \frac{vx_2}{c^2} \right)^2 - \gamma^2 (x_2 - vt_2)^2 - y_2^2 - z_2^2 \\ &= c^2 \gamma^2 \left[t_2^2 - \frac{2vx_2 t_2}{c^2} + \frac{v^2 x_2^2}{c^4} - \frac{x_2^2}{c^2} + \frac{2vx_2 t_2}{c^2} - \frac{v^2 t_2^2}{c^2} \right] - y_2^2 - z_2^2 \\ &= c^2 \gamma^2 \left[x_2^2 \left(\frac{v^2}{c^4} - \frac{1}{c^2} \right) + t_2^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right] - y_2^2 - z_2^2 \\ &= x_2^2 \frac{\frac{v^2}{c^2} - 1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + t_2^2 \frac{c^2 - v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - y_2^2 - z_2^2 \\ &= t_2^2 c^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 \\ &= \left(\frac{1}{c} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \right)^2 c^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 \\ &= 0 \\ \frac{\sqrt{x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2}}{t_2'} &= c \end{aligned}$$

Obwohl die Lichtgeschwindigkeit konstant ist, verändert sich die Wellenlänge λ und damit auch die Frequenz f einer Lichtwelle unter der Lorentztransformation.

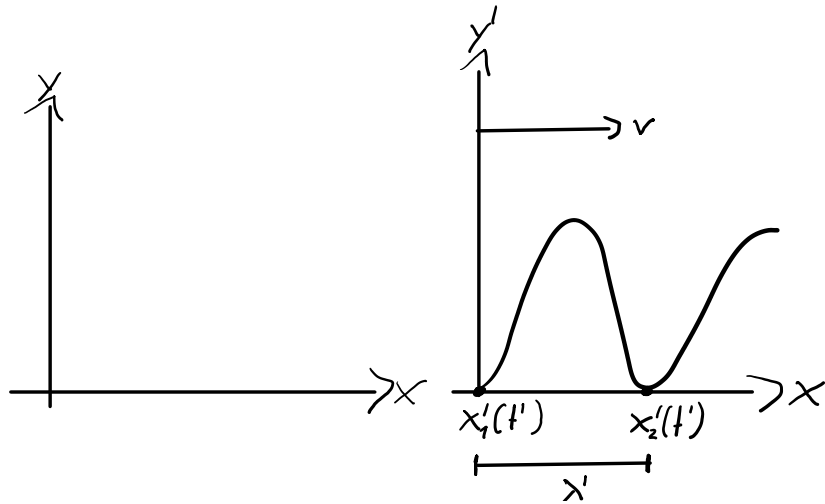


Abbildung 6: Skizze der Koordinatensysteme. Zum Zeitpunkt $t' = 0$ überlappen sich die Koordinatensysteme.

In Abbildung 6 sieht man eine Lichtwelle. Sei $x'_1(t')$ die Position des letzten ausgesendeten Wellentals und $x'_2(t')$ die Position des vorletzten ausgesendeten Wellentals. Zu $t' = 0$ gilt $x'_1 = 0$ und $x'_2 = \lambda'$, wobei letzteres die Wellenlänge im bewegten Bezugssystem ist. Bestimme $x_2(t = 0)$ und $x_1(t = 0)$ und damit die Wellenlänge im Laborsystem, denn $\lambda = x_2(t = 0) - x_1(t = 0)$. Beachte dass sich Zeitpunkte auch transformieren!

(b) (2 Punkte) Bestimme $\frac{\lambda'}{\lambda}$ und $\frac{f'}{f}$.

Lösung:

$t' = 0$ korrespondiert zu

$$t = \gamma \frac{vx'}{c^2}.$$

Für den Punkt x_2 wäre dies also

$$\begin{aligned} t &= \gamma \frac{vx'_2}{c^2} \\ &= \gamma \frac{v\lambda'}{c^2}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} x_2(t = 0) &= x_2(t = \gamma \frac{v\lambda'}{c^2}) - c \cdot \gamma \frac{v\lambda'}{c^2} \\ &= \gamma \lambda' \left(1 - \frac{v}{c}\right) \end{aligned}$$

Analog kann man zeigen, dass $x_1(t = 0) = 0$, daher ist

$$\begin{aligned}
\lambda &= x_2(t=0) - x_1(t=0) \\
&= \gamma \lambda' \left(1 - \frac{v}{c}\right) \\
\frac{\lambda'}{\lambda} &= \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c}\right)} \\
\frac{f'}{f} &= \gamma \left(1 - \frac{v}{c}\right).
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun einen Körper der Masse m . Er habe im bewegten System die Geschwindigkeit $v'_i = 0$ und im stationären v_{in} , wobei i für initial steht. Der Körper sendet gleichzeitig zwei Photonen mit der gleichen Frequenz f' in entgegengesetzte Richtung aus (siehe Skizze). Da beide im bewegten System die gleiche Frequenz und somit den gleichen Impuls haben sollte sich seine Geschwindigkeit nicht ändern, d.h. $v'_{\text{fin}} = 0$, wobei fin für finale steht.

- (c) (1 Punkt) Mit Hilfe des Ergebnisses des Punktes (b), bestimme die Frequenzen der beiden Photonen im Ruhesystem f_1 und f_2 .

Lösung:

Wir benutzen den Subskript 1 um das Photon welches sich in positive x -Richtung bewegt zu beschreiben und den Subskript 2 für das in negative x -Richtung bewegende Photon.

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{f'}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c}\right)} \\
f_2 &= \frac{f'}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c}\right)}
\end{aligned}$$

Als nächstes wollen wir uns die Gleichung für die Impulserhaltung im Ruhesystem ansehen, diese ist

$$m_{\text{fin}} v_{\text{fin}} + p_{\text{ph},1} + p_{\text{ph},2} = m_{\text{in}} v_{\text{in}}, \quad (16)$$

wobei $p_{\text{ph},1}$ und $p_{\text{ph},2}$ die Impulse von Photonen sind. Wir sehen, es existiert eine Massendifferenz $\Delta m = m_{\text{fin}} - m_{\text{in}}$. Außerdem hat der Körper Energie $\Delta E = E_{\text{ph},1} + E_{\text{ph},2}$ verloren.

- (d) (2 Punkte) Bringe Δm und ΔE in Verbindung und interpretiere.

Lösung:

Im gestrichenen System werden zwei Photonen mit dem gleichen Impuls in gegenüberliegende Richtungen Photonen geschickt, daher ändert sich die Geschwindigkeit der Masse nicht und $v_{\text{fin}} = v_{\text{in}} = v$. Wir schreiben die Impulserhaltung um, wobei darauf zu achten ist, dass wir Photon 2 in die negative x Richtung senden, daher ist der Impuls negativ und wir schreiben

$$\begin{aligned}
v(m_{\text{fin}} - m_{\text{in}}) &= -(p_1 + p_2) \\
v\Delta m &= -\left(\frac{hf_1}{c} - \frac{hf_1}{c}\right) \\
&= \frac{hf'}{c\gamma} \left(\frac{1}{1+\frac{v}{c}} - \frac{1}{1-\frac{v}{c}}\right) \\
&= \frac{hf'}{c\gamma} \left(\frac{1-\frac{v}{c} - (1+\frac{v}{c})}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) \\
&= -\frac{2hf'\gamma v}{c^2} \\
\Delta m &= -2hf'\gamma.
\end{aligned}$$

Die Energie, die der Körper verloren hat ist

$$\begin{aligned}
\Delta E &= -hf_1 - hf_2 \\
&= -\frac{hf'}{\gamma} \left(\frac{1}{1-\frac{v}{c}} + \frac{1}{1+\frac{v}{c}}\right) \\
&= -\frac{hf'}{\gamma} \left(\frac{1+\frac{v}{c} + 1-\frac{v}{c}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) \\
&= -2hf'\gamma.
\end{aligned}$$

Masse ist also eine Form von Energie. Wir haben Einsteins berühmte Formel hergeleitet.

$$\Delta E = \Delta mc^2$$

1) Begründe die Annahmen

Annahme 1: Die Dicke δ ist klein gegenüber den Rohrdimensionen l und kann somit vernachlässigt werden.

Dicke Flammenfront $\delta \sim$ Eindringtiefe Wärme in charakteristische Reaktionszeit τ

$$\sim \sqrt{\chi \tau}, \quad \chi \text{ Wärmekoeffizient}$$

Annahmen:

- gas schlechter Wärmeleiter: $\chi \ll$
- gas verbrennt „schnell“: $\tau <$

$$\Rightarrow \delta \sim \sqrt{\chi \tau} \ll l \text{ falls } l \sim \text{cm}$$

Annahme 2: Die Flammenfront breitet sich weit unter der Schallgeschwindigkeit c aus.

Ausbreitungsgeschwindigkeit der Flamme $u_1 \sim \frac{\delta}{\tau} \sim \sqrt{\frac{\chi}{\tau}}$

$\chi \sim$ (mittlere freie Weglänge) (thermische Geschwindigkeit)

$=$ (mittlere freie Flugzeit τ_{fr}) (thermische Geschwindigkeit)²

$\sim \tau_{fr} c^2$ da (thermische Geschwindigkeit) $\sim c$

$$\Rightarrow u_1 \sim \sqrt{\frac{\chi}{\tau}} \sim c \sqrt{\frac{\tau_{fr}}{\tau}}$$

$$\Rightarrow \frac{u_1}{c} \sim \sqrt{\frac{\tau_{fr}}{\tau}}$$

Reaktion geht nur im Bruchteil aller Teilchenkollisionen voran

$$\Rightarrow \frac{\bar{z}_{fr}}{T} \ll 1$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{c} \sim \sqrt{\frac{\bar{z}_{fr}}{T}} \ll 1$$

2) Welche Gleichung für den Druck ergibt sich aus den Gleichungen (1.3)?

Kontinuitätsgleichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}' = 0$

Eulersche Bewegungsgleichung: $\frac{\partial v'}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}' = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p'$

\vec{v}' , p' Abweichungen von den Gleichgewichtsgrößen
 \vec{v} , p konstant

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}' = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p' \quad | \quad \vec{\nabla} \cdot$$

linke Seite:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial v'}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}' \right) &= \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial v'}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left((\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}' \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{v}'}_0 + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{v}'}_0 = 0 \end{aligned}$$

rechte Seite:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p' \right) = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} p') = -\frac{1}{\rho} \Delta p'$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \Delta p'$$

$$\Delta p' = 0$$

3. Die Störung ζ ist periodisch in y und t . Welche Randbedingungen der Gleichungen (1.3) sind kompatibel dazu? Wähle möglichst einfache Randbedingungen!

Periodische Randbedingungen für \vec{v}' , \vec{v}' , π' stellen die geringste Zahl an Bedingungengleichungen.

4. Bestimme Druckabweichungen $\pi_1(x, y, t)$, $\pi_2(x, y, t)$ in den Gasgemischen 1 und 2 aus den in 2 bestimmten Gleichung unter Berücksichtigung der angenommenen Randbedingungen.

Ansatz: $\pi_1 \sim \underbrace{\exp(\dots)}_{\text{periodisch in } y} \underbrace{\exp(\dots)}_{\text{periodisch in } t} \underbrace{\exp(\dots)}_{\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow -\infty}$

$$\begin{aligned} \pi_1 &\sim \exp(iky) \exp(i\omega t) \exp(kx) \\ &= \exp(kx + iky + i\omega t) \end{aligned}$$

$\pi_2 \sim \underbrace{\exp(\dots)}_{\text{periodisch in } y} \underbrace{\exp(\dots)}_{\text{periodisch in } t} \underbrace{\exp(\dots)}_{\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \infty}$

$$\begin{aligned} \pi_2 &\sim \exp(iky) \exp(i\omega t) \exp(-kx) \\ &= \exp(-kx + iky + i\omega t) \end{aligned}$$

5. Bestimme eine homogene Lösung $\vec{v}'(x, y, t)$ der Gleichungen (1.4) für das Gasgemisch 2. Ist sie für den gesamten Bereich physikalisch sinnvoll? Es kann $\vec{v}'_2 = 0$ angenommen werden.

Homogene Eulerische Gleichung mit $\vec{v}' \sim e_x$

$$\frac{\partial \vec{v}'_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial \vec{v}'_2}{\partial x} = 0$$

n Komponenten:

$$\frac{\partial \psi'_{2,x}}{\partial t} + \sigma \frac{\partial \psi'_{2,x}}{\partial x} = 0 \quad (\Rightarrow \omega = -k \cdot \sigma)$$

$$\frac{\partial \psi'_{2,y}}{\partial t} + \sigma \frac{\partial \psi'_{2,y}}{\partial x} = 0, \quad \text{2-Komponente verschwindet laut Aufgabe}$$

Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \vec{\psi}'_2 = 0$$

in Komponenten

$$\frac{\partial \psi'_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi'_y}{\partial y} = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{\partial \psi'_x}{\partial x} = -\frac{\partial \psi'_y}{\partial y}$$

$\Rightarrow \psi'_x \sim \psi'_y$ für „Exponentialansätze“

Ansatz: $\psi'_x \sim \underbrace{\exp(i k y)}_{\text{periodisch in } y} \cdot \underbrace{\exp(i \omega t)}_{\text{periodisch in } t} \cdot \underbrace{\exp(-i \frac{\omega}{\sigma} x)}_{\text{beschränkt für } x \rightarrow \infty}$

$$= \exp(i k y) \exp(i \omega t) \exp(-i \frac{\omega}{\sigma} x)$$

$$= \exp(i k y - i \frac{\omega}{\sigma} x + i \omega t)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt

$$-i \frac{\omega}{\sigma} \psi'_x + i k \psi'_y = 0 \Leftrightarrow \psi'_y = \frac{\omega}{k \sigma} \psi'_x$$

ω reell: Lösung stabil

ω rein imaginär $\text{Im}\{\omega\} > 0$: Lösung instabil

in t , stabil in $x > 0$

(Bereich des Gasgemisch 2)

6. Aus den Drücken bestimmen dann die Geschwindigkeitsabweichungen \vec{v}'_1, \vec{v}'_2 für beide Gasmische, abermals mit verschwindender z-Komponente. Beachte die homogene Lösung aus dem vorherigen Unterpunkt.

Inhomogene Eulergleichung mit $\vec{v} \sim \hat{e}_x$

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + v \frac{\partial \vec{v}'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \nabla p'$$

in Komponentenform mit verschwindender z-Komponente

$$\frac{\partial v'_x}{\partial t} + v \frac{\partial v'_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v'_y}{\partial t} + v \frac{\partial v'_y}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y}$$

Ansätze für die Geschwindigkeiten

$$p'_1 \sim \exp(+kx + ik_y y + i\omega t)$$

$$\Rightarrow v_{1,x}, v_{1,y} \sim \exp(\dots)$$

$$p'_2 \sim \exp(-kx + ik_y y + i\omega t)$$

$$\Rightarrow v_{2,x}, v_{2,y} \sim \exp(\dots)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt für die partikuläre Lösung

$$+k v_{1,x} + ik v_{1,y} = 0$$

$$\Leftrightarrow v_{1,y} = i v_{1,x}$$

$$-k v_{2,x} + ik v_{2,y} = 0$$

$$\Leftrightarrow v_{2,y} = -i v_{2,x}$$

Aus der Eulergleichung folgt für den Druck im Gasgemisch

$$i\omega \sigma'_{1,x} + v(-k) \sigma'_{1,x} = -\frac{1}{\rho_1} (-k) p'_1$$

$$\Rightarrow p'_1 = \frac{\rho_1}{k} (i\omega - v_1 k) \sigma'_{1,x} \quad \checkmark$$

$$i\omega \sigma'_{2,y} + v(-k) \sigma'_{2,y} = -\frac{1}{\rho_1} (ik) p'_1$$

$$\Rightarrow p'_1 = i \frac{\rho_1}{k} (i\omega - v_1 k) \sigma'_{2,y} \quad \checkmark$$

zusammen für p'_1, \vec{v}'_1

$$p'_1 = \frac{\rho_1}{k} (i\omega - v_1 k) A \exp(-kx +iky +i\omega t)$$

$$v'_{1,x} = A \exp(+kx +iky +i\omega t)$$

$$v'_{1,y} = i A \exp(+kx +iky +i\omega t)$$

Für die partikulären Lösungen im Gasgemisch 2 folgt analog

$$v'_{2,x} = B \exp(-kx +iky +i\omega t)$$

$$v'_{2,y} = -i B \exp(-kx +iky +i\omega t)$$

$$p'_2 = -B \rho_2 \left[v_2 + \frac{i\omega}{k} \right] \exp(-kx +iky -i\omega t)$$

Homogene Anteile

$$v^{(H)}_{2,x} = C \exp(-kx +iky +i\omega t)$$

$$v^{(H)}_{2,y} = \frac{\omega}{k v_2} C \exp(-kx +iky +i\omega t)$$

7. Die erhaltenen Lösungen für \vec{v}' , \vec{r}_1 , \vec{v}'_2 , \vec{r}_2 lassen sich prinzipiell in die Gleichungen (16), (15) einsetzen, um ein Gleichungssystem für die Koeffizienten zu erhalten.

Eine längere Rechnung würde dann unter der Verwendung von $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ auf folgende Bedingung für Ω deren Lösbarkeit führen:

$$\Omega^2 (v_1 + v_2) + 2\Omega k v_1 v_2 + k^2 v_1 v_2 (v_1 - v_2) = 0$$

Welche Lösungen $\Omega \equiv i\omega$ sind für obige Gleichung möglich?

$v_1 > v_2$: 2 negative reelle Nullstellen
2 konjugiert komplexe Nullstellen mit negativem Realteil

$v_1 < v_2$: 2 reelle Nullstellen, eine davon positiv

8. Man lässt sich aus der Stabilität der Flammenfront aussagen? Findet sich diese Modellösung auch in der realen Welt? Warum (nicht)?

Gasgemisch 2 (unverbrannt) heißer als Gasgemisch 1 (unverbrannt)

$$\Rightarrow \rho_2 < \rho_1$$

$$\Rightarrow v_1 > v_2$$

$$\Rightarrow \Omega \equiv i\omega \text{ reell}$$

\Rightarrow Flammenfront instabil

reale Welt: stabile Flammen (fronten) existieren

Grund für Fehlvorhersage: mehrere Effekte nicht berücksichtigt

- thermische Effekte
- ...

7 Atom im Käfig: Lösungen

Frage (a): Was sind die erlaubten Werte für k um die Randbedingungen zu erfüllen? Was muss der Parameter $D(k)$ sein, damit die Maxwellgleichung

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{E}} \quad (17)$$

erfüllt ist?

Lösung (a):

Erlaubte Werte für k : Um die Randbedingungen zu erfüllen, die besagen, dass das elektrische Feld \mathbf{E} an den Rändern des optischen Käfigs (bei $x = 0$ und $x = L_x$) Null sein muss, folgt, dass:

$$k = \frac{n\pi}{L_x}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Das sind die erlaubten Werte für k .

Bestimmung von $D(k)$: Die Maxwell-Gleichung $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{E}}$ führt zu:

$$D(k) = -\frac{1}{kc^2}$$

Frage (b):

Die Energie im elektromagnetischen Feld ist gegeben durch

$$H = \int \frac{dr}{2} \left[\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right] \quad (18)$$

Zeige, dass man obige Gleichung als

$$H = \sum_k \left[\frac{\dot{Q}_k^2}{2} + \frac{\omega^2 Q_k^2}{2} \right] \quad (19)$$

schreiben kann, wobei $Q_k = \lambda(k)A_k$ sei. Bestimme λ .

Lösung (b):

Zunächst betrachten wir die Ausdrücke für das elektrische Feld \mathbf{E} und das magnetische Feld \mathbf{B} :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_k A_k(t) \sin(kx) \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (20)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \sum_k \dot{A}_k(t) D(k) \cos(kx) \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (21)$$

Die Quadrate der Felder sind:

$$\mathbf{E}(x)^2 = \left(\sum_k A_k(t) \sin(kx) \right)^2,$$

$$\mathbf{B}(x)^2 = \left(\sum_k \dot{A}_k(t) D(k) \cos(kx) \right)^2.$$

Integrieren wir diese Ausdrücke über den Raum, so erhalten wir (mit Hilfe von Orthogonalitätsbedingungen der Sinusfunktionen von unterschiedlichen k 's):

$$\int_0^{L_x} E^2 dx = \sum_k A_k(t)^2 \int_0^{L_x} \sin^2(kx) dx = \sum_k \frac{L_x}{2} A_k(t)^2,$$

$$\int_0^{L_x} B^2 dx = \sum_k \dot{A}_k(t)^2 D(k)^2 \int_0^{L_x} \cos^2(kx) dx = \sum_k \frac{L_x}{2} \dot{A}_k(t)^2 D(k)^2.$$

Erinnern wir uns daran, dass $D(k) = -\frac{1}{kc^2}$ und $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$, so gilt:

$$D(k)^2 = \frac{1}{k^2 c^4}$$

Einsetzen in die Energieformel ergibt:

$$H = \frac{1}{2} \sum_k \left[\varepsilon_0 L_x A_k(t)^2 + \frac{L_x}{k^2 c^4 \mu_0} \dot{A}_k(t)^2 \right].$$

Umformulierung in harmonische Oszillatorform:

$$H = \sum_k \left[\frac{\dot{Q}_k^2}{2} + \frac{\omega_k^2 Q_k^2}{2} \right],$$

wobei

$$Q_k = \frac{\sqrt{\varepsilon_0 L_x}}{\omega} A_k, \quad \omega_k = kc.$$

Damit ist $\lambda(k) = \frac{\sqrt{\varepsilon_0 L_x}}{\omega}$.

Frage (c):

(c) (2 Punkte) Zeige, dass der Hamiltonoperator aus Punkt (b) durch

$$\hat{H} = \sum_k \hbar \omega (a_k^+ a_k^- + \frac{1}{2}) \tag{22}$$

gegeben ist und berechne danach den elektrischen Feldoperator $\hat{\mathbf{E}}$, indem du \hat{Q}_k durch Erzeuger und Vernichter ausdrückst und in Gleichung 20 einsetzt.

Quantenmechanische Umformulierungen und Lösung: Die Umformulierungen für die Quantisierung der Hamiltonfunktion sind wie folgt:

$$\dot{Q}_k \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial Q_k}, \quad Q_k \rightarrow \hat{Q}_k$$

This substitution transforms the Hamiltonian to:

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial Q_k^2} + \frac{\omega(k)^2}{2} \hat{Q}_k^2$$

The definitions for the creation and annihilation operators are given by:

$$a_k^\pm = \sqrt{\frac{\omega(k)}{2\hbar}} \hat{Q}_k \pm \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(k)}} \frac{\partial}{\partial Q_k}$$

The expression for the product of the creation and annihilation operators, and its reformulation into the Hamiltonian, is:

$$\begin{aligned} a_k^+ a_k^- &= \frac{\hbar}{2\omega(k)} \frac{\partial^2}{\partial Q_k^2} + \frac{\omega(k)}{2\hbar} \hat{Q}_k^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial Q_k}, \hat{Q}_k \right] \\ &\Rightarrow (a_k^+ a_k^- + \frac{1}{2}) \hbar \omega(k) = \hat{H} \end{aligned}$$

Für den elektrischen Feldoperator $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$, basierend auf Gleichung 20, erhalten wir:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \sum_k \hat{A}_k(t) \sin(kx) \hat{\mathbf{e}}_y = \sum_k \lambda_k^{-1} \hat{Q}_k(t) \sin(kx) \hat{\mathbf{e}}_y$$

wobei $\hat{Q}_k(t)$ durch die Erzeuger und Vernichter ausgedrückt wird:

$$\hat{Q}_k(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(k)}} (a_k^- + a_k^+) \sin(kx)$$

Einsetzen ergibt:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar\omega(k)}{2L_x\epsilon_0}} (a_k^- + a_k^+) \sin(kx) \hat{\mathbf{e}}_y$$

Frage (d):

Bestimme die Koeffizienten γ_k^+ und γ_k^- für die Interaktions-Hamiltonfunktion des Zweiniveausystems im elektromagnetischen Feld.

Lösung (d):

Die Interaktions-Hamiltonfunktion \hat{H}_I ist gegeben durch:

$$\hat{H}_I = \sum_k (-e) \sqrt{\frac{\hbar\omega(k)}{\epsilon_0 L_x}} (a_k^+ + a_k^-) \hat{\mathbf{e}}_y \cdot \left(\sum_{\sigma, \sigma'} \langle \psi_\sigma | \vec{r} | \psi_{\sigma'} \rangle \langle \psi_{\sigma'} | \right),$$

was umgeschrieben werden kann, da σ und σ' jeweils nur über ground state g und excited state e summieren. Daher sind die elemente wo $\sigma = \sigma'$ null.

$$\hat{H}_I = \sum_k (-e) \sqrt{\frac{\hbar\omega(k)}{2\varepsilon_0 L_x}} (a_k^+ + a_k^-) \hat{e}_y \cdot (\langle \psi_g | \hat{r} | \psi_e \rangle \sigma^- + \langle \psi_e | \hat{r} | \psi_g \rangle \sigma^+)$$

wobei $\omega(k)$ die Frequenz der k -ten Mode ist und \hat{e}_y die Richtung des elektrischen Feldes entlang der y -Achse angibt.

Die Koeffizienten γ_k^+ und γ_k^- lassen sich nun durch Vergleich mit der Hamiltonian in der Angabe ableiten. Sie sind durch die folgende Ausdrücke gegeben:

$$\gamma_k^+ = -e \sqrt{\frac{\hbar\omega(k)}{2\varepsilon_0 L_x}} \langle \psi_g | \hat{r} | \psi_e \rangle \sin(kx),$$

$$\gamma_k^- = -e \sqrt{\frac{\hbar\omega(k)}{2\varepsilon_0 L_x}} \langle \psi_e | \hat{r} | \psi_g \rangle \sin(kx).$$

Diese Koeffizienten stellen die Kopplungsstärken zwischen den atomaren Übergängen und den Moden des elektromagnetischen Feldes dar. $\sigma^+ = |\psi_e\rangle\langle\psi_g|$ und $\sigma^- = |\psi_g\rangle\langle\psi_e|$ sind die Auf- und Absteigeoperatoren, die die Übergänge zwischen den beiden Zuständen beschreiben.

Frage (e):

Unter der Annahme, dass $\hbar\omega(k_1) = \epsilon_e$, bestimme die Zeitentwicklung von $c_g(t)$ und $c_e(t)$ und interpretiere die Ergebnisse.

Lösung (e):

Unter der Annahme, dass die Resonanzbedingung $\hbar\omega(k_1) = \epsilon_e$ erfüllt ist, betrachten wir die Zeitentwicklung der Koeffizienten $c_g(t)$ und $c_e(t)$ im Kontext des atomaren Zweiniveausystems und seiner Wechselwirkung mit einem elektromagnetischen Feld. Der Hamiltonoperator \hat{H} für das Gesamtsystem ist gegeben durch:

$$\hat{H} = \sum_k \hbar\omega(k) (a_k^\pm a_k + \frac{1}{2}) + \epsilon_e |\psi_e\rangle\langle\psi_e| + \sum_{\sigma, \sigma'} |\psi_\sigma\rangle\langle\psi_\sigma| \hat{H} |\psi_{\sigma'}\rangle\langle\psi_{\sigma'}|.$$

Die gekoppelten Differentialgleichungen für die Entwicklung dieser Koeffizienten sind:

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{c}_g &= \langle \psi_g | \langle 0 | a_{k_1}^- \hat{H} | \psi_g \rangle a_{k_1}^+ | 0 \rangle c_g + \langle \psi_g | \langle 0 | a_{k_1}^- \hat{H} | \psi_e \rangle | 0 \rangle c_e, \\ i\hbar\dot{c}_e &= \langle \psi_e | \langle 0 | \hat{H} | \psi_g \rangle a_{k_1}^+ | 0 \rangle c_g + \langle \psi_e | \hat{H} | \psi_e \rangle | 0 \rangle c_e. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können durch die Matrixform

$$\begin{bmatrix} \dot{c}_g \\ \dot{c}_e \end{bmatrix} = -\frac{i}{\hbar} \begin{bmatrix} \alpha_\omega & \gamma^- \\ \gamma^+ & \hbar\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_g \\ c_e \end{bmatrix}$$

vereinfacht werden, wobei α_ω und $\hbar\omega$ die Energiebeiträge und γ^+ , γ^- die Kopplungsterme sind.

Um die dynamische Entwicklung weiter zu vereinfachen, führen wir neue Koeffizienten ein:

$$a_g = e^{\frac{i\hbar\omega t}{k}} c_g, \quad a_e = e^{\frac{i\hbar\omega t}{\hbar}} c_e,$$

wobei sich die Gleichungen für a_g und a_e reduzieren zu:

$$\dot{a}_g + a_g(-i\omega) = -i\omega a_g + \gamma^- a_e \left(\frac{i}{k}\right), \quad \dot{a}_e + a_e(-i\omega) = -i\omega a_e - \frac{i}{\hbar} \gamma^+ a_g.$$

Durch diese Transformation erhalten wir eine harmonische Oszillation zwischen den Zuständen, beschrieben durch:

$$\begin{aligned} a_g(t) &= a_g(0) \cos\left(\frac{\gamma}{\hbar}t\right) + a_e(0) \sin\left(\frac{\gamma}{\hbar}t\right), \\ a_e(t) &= a_e(0) \cos\left(\frac{\gamma}{\hbar}t\right) - a_g(0) \sin\left(\frac{\gamma}{\hbar}t\right). \end{aligned}$$

8 Quantum Bomb Tester: Solutions

(a) Scenario Without Bombs

Using two 50/50 beam splitters, a photon entering the interferometer in state $|0\rangle$ undergoes transformations such that:

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad B^2 = iX,$$

and thus,

$$B^2|0\rangle = iX|0\rangle \equiv |1\rangle.$$

The output is invariably detected at D_1 , demonstrating constructive interference towards $|1\rangle$ and destructive towards $|0\rangle$.

(b) Scenario With Bombs

If a bomb is present, it acts as a quantum measurement device, altering the photon's pathway probabilities:

$$\begin{aligned} P_{\text{boom}} &= \frac{1}{2}, \text{ leading to an explosion,} \\ P_{D_0} &= \frac{1}{4}, \text{ photon detected at } D_0 \text{ without explosion,} \\ P_{D_1} &= \frac{1}{4}, \text{ photon detected at } D_1 \text{ with uncertainty.} \end{aligned}$$

Detection at D_0 confirms the presence of a bomb without triggering it, necessitating experiment repetition when D_1 is detected.

(c) Implications of Photon Detection at D_0 and D_1

If we measure a photon at D_0 , we know for certain that:

- the bomb did not explode since we detect the photon;
- the bomb must be in the room because otherwise the photon would be measured at D_1 .

Observing a photon at D_0 thus allows us to detect the bomb without exploding it!

On the other hand, measuring a photon at D_1 can happen in both the cases of no bombs and with bombs. Hence, if we measure a photon at D_1 , we are uncertain about whether there is a bomb and we will repeat our experiment.

The overall scheme if there is a bomb is given by:

$$\begin{cases} P_{\text{boom}} = \frac{1}{2} & \text{BOOM, terminate} \\ P_{\text{idle}} = \frac{1}{2} & \text{bomb idle} \\ P_{D_0} = \frac{1}{4} & \text{measure } |0\rangle \rightarrow \text{bomb detected, terminate.} \\ P_{D_1} = \frac{1}{4} & \text{measure } |1\rangle \rightarrow \text{uncertain, repeat.} \end{cases}$$

At each repeat we have $P_{\text{boom}} = \frac{1}{2}$ probability of setting off the bomb and $P_{D_0} = \frac{1}{4}$ probability of detecting the bomb.

In the limit of infinity trials, we will terminate in one of the two outcomes above. The probability of the two terminating options is determined by their relative probability. Hence, the probability of the bomb being successfully detected if it exists is:

$$\frac{P_{D_0}}{P_{\text{boom}} + P_{D_0}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

On average, two out of three bombs will explode and one will be detected successfully.

If the room is empty, we always detect the photon at D_1 and the scheme does not terminate. The probability for the detection of k successive photons at D_1 in the presence of a bomb is $(\frac{1}{4})^k$. For sufficiently large k we can thus conclude that it is highly unlikely to have a bomb in the room and terminate the iteration.

(d) Advanced Beam Splitter Configurations

Can we do any better with beam splitters beyond the 50/50 type? More general beam-splitters will have a transmission probability T and a reflection probability $R = 1 - T$ if we measure right after the beam splitter. The matrix form (gate form) of such a general beam splitter is given in Sec. 3.2 of the lecture notes as:

$$B = \sqrt{T}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) + i\sqrt{R}(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) = \begin{pmatrix} \sqrt{T} & i\sqrt{R} \\ i\sqrt{R} & \sqrt{T} \end{pmatrix}$$

Now we will replace the two 50/50 beam-splitters in our set-up with one that has $T = t$ and another that has $T = r = 1 - t$:

$$B_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{t} & i\sqrt{r} \\ i\sqrt{r} & \sqrt{t} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{r} & i\sqrt{t} \\ i\sqrt{t} & \sqrt{r} \end{pmatrix}$$

In such a case, following similar arguments as before, we then have:

No bombs:

With input state $|0\rangle$, our circuit is simply

$$B_1 B_2 |0\rangle = iX|0\rangle \equiv |1\rangle$$

Hence, we will measure $|1\rangle$ with 100% probability.

With bombs:

The bomb acts as a detector that essentially performs a measurement after the first beam-splitter. Overall, we have:

$$\begin{cases} P_{\text{boom}} = t, & \text{BOOM, terminate} \\ P_{\text{idle}} = r, & \text{bomb idle} \\ P_{D_0} = rt, & \text{measure } |0\rangle \rightarrow \text{bomb detected, terminate} \\ P_{D_1} = r^2, & \text{measure } |1\rangle \rightarrow \text{uncertain, repeat} \end{cases}$$

At each repeat, we have $P_{\text{boom}} = t$ probability of setting off the bomb and $P_{D_0} = rt$ probability of detecting the bomb. In the limit of infinity trials, we will terminate in one of the two outcomes above. The probability of the two terminating options is determined by their relative probability. Hence, the probability of terminating in the bomb being successfully detected is:

$$\frac{P_{D_0}}{P_{\text{boom}} + P_{D_0}} = \frac{rt}{t + rt} = \frac{r}{1 + r}$$

To maximize the probability of detecting the bomb, we have $r \rightarrow 1$, and $\frac{r}{1+r} \rightarrow \frac{1}{2}$. Note that, this also means the probability of termination in each run is infinitesimal and we require infinite trials to terminate, i.e., most of the measurement will end in the ‘useless’ $|1\rangle$.

(e) Utilizing the Quantum Zeno Effect for Improved Detection

We will now employ a series of beam splitters, each characterized by the matrix:

$$B_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & i \sin \theta \\ i \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = 1 \cos \theta + iX \sin \theta = e^{i\theta X}.$$

Here, $T = \cos^2 \theta$ and $R = 1 - T = \sin^2 \theta$. We utilize an even number of beam splitters, N , each set with $\theta = \frac{\pi}{2N} + \frac{\pi}{2}$.

Scenario Without Bombs

In the absence of a bomb, the system behaves as follows:

$$B_N(\theta) = e^{iN\theta X} = 1 \cos(N\theta) + iX \sin(N\theta),$$

where $N\theta = \frac{\pi}{2} + N\frac{\pi}{2} = (n + \frac{1}{2})\pi$ for some integer n , as N is even. Therefore,

$$B_N(\theta) = 1 \cos(N\theta) + iX \sin(N\theta) \propto X,$$

leading the circuit to behave like an X gate, thus the photon always exits as $|1\rangle$ when input is $|0\rangle$.

Scenario With Bombs

With a bomb present, interference is destroyed, forcing the photon to potentially follow a path that includes all reflections:

$$P_{D0} = R^N = \sin^{2N}(\theta) = \sin^{2N}\left(\frac{\pi}{2N} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^{2N}\left(\frac{\pi}{2N}\right).$$

As N increases,

$$P_{D0} = \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2N}\right)^2 + O(N^{-4})\right)^{2N} \approx 1 - \frac{\pi^2}{4N} + O(N^{-2}),$$

which approaches 1 as $N \rightarrow \infty$. Thus, for large N , the system will always measure $|0\rangle$ if a bomb is present and $|1\rangle$ if not, providing a perfect distinction without causing the bomb to explode.

To sum up, the bomb is just a detector, our question turns into, can we know that whether there is a detector present without setting off the detector? The answer is yes, and the way we do this is making use of the fact that a detector will destroy interference by its mere presence even without interacting with the particle. Hence, we can map the question of whether there is a detector or not to whether we have observe a interference pattern or not. This is very much in the same spirit as the double slit experiment.

9 Coupled Oscillators: Solutions

Consider two classical particles each with mass m , connected to each other and to two external fixed points via springs as shown in the figure (which represents the equilibrium position). The spring constants are k for the internal spring and pk for the external springs, where p is a scalar multiplier.

Frequencies of Oscillation Modes

To find the modes of oscillation, we start with the equations of motion and apply the suggested transformation to variables $X = x_1 + x_2$ and $Y = x_1 - x_2$:

Original Equations:

$$\begin{aligned}m\ddot{x}_1 &= -pKx_1 - K(x_1 - x_2), \\m\ddot{x}_2 &= -pKx_2 + K(x_1 - x_2).\end{aligned}$$

Substituting X and Y , and simplifying, we find:

$$\begin{aligned}m\ddot{X} &= -pKX \quad (\text{Symmetric mode}), \\m\ddot{Y} &= -(2K + pK)Y \quad (\text{Antisymmetric mode}).\end{aligned}$$

Solving these equations, we derive the frequencies ω :

$$\begin{aligned}\omega_X &= \sqrt{\frac{pK}{m}} \quad (\text{Frequency for } X), \\ \omega_Y &= \sqrt{\frac{(2+p)K}{m}} \quad (\text{Frequency for } Y).\end{aligned}$$

Time Evolution of Coordinates

Given the initial conditions $x_1(0) = x_0$, $x_2(0) = 0$, and $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$:

$$\begin{aligned}X(0) &= x_0, \quad Y(0) = x_0, \quad \dot{X}(0) = \dot{Y}(0) = 0, \\X(t) &= x_0 \cos(\omega_X t), \\Y(t) &= x_0 \cos(\omega_Y t), \\x_1(t) &= \frac{1}{2}(X(t) + Y(t)) = \frac{x_0}{2}(\cos(\omega_X t) + \cos(\omega_Y t)), \\x_2(t) &= \frac{1}{2}(X(t) - Y(t)) = \frac{x_0}{2}(\cos(\omega_X t) - \cos(\omega_Y t)).\end{aligned}$$

9.1 Ground-State Energy and Expectation Value

(c)

Assuming a harmonic potential, the Hamiltonian for each mode is quantized:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_X}{2} + \frac{\hbar\omega_Y}{2}$$

The ground-state energy, E_0 , of non-interacting harmonic oscillators is the sum of the zero-point energies of each mode:

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_X + \frac{1}{2}\hbar\omega_Y$$

To find $\langle x_1^2 \rangle$ in the ground state, use:

$$\langle x_1^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega_X} + \frac{\hbar}{2m\omega_Y}$$

9.2 Quantum Thermodynamics

The quantum mechanical system (again with $p = \frac{1}{4}$) is in equilibrium at temperature T (you can work in units where the Boltzmann constant $k_B = 1$).

(d) Internal Energy U

For a quantum harmonic oscillator, the partition function Z for a single mode with frequency ω at temperature T is given by:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n+\frac{1}{2})}$$

This can be simplified to:

$$Z = e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta\hbar\omega})^n = \frac{e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}$$

The internal energy U is then given by:

$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \right)$$

For two modes with frequencies ω_X and ω_Y , the total internal energy U is:

$$U = \hbar\omega_X \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_X} - 1} \right) + \hbar\omega_Y \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_Y} - 1} \right)$$

(e) High Temperature Limit and Heat Capacity C

At high temperatures ($T \rightarrow \infty$), $\beta \rightarrow 0$, and using the Taylor expansion of $e^x \approx 1 + x$:

$$\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \approx \frac{1}{\beta\hbar\omega}$$

Thus, the internal energy U approximates to:

$$U \approx \hbar\omega_X \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta\hbar\omega_X} \right) + \hbar\omega_Y \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta\hbar\omega_Y} \right) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\omega_X} + \frac{1}{\omega_Y} \right)$$

The heat capacity C at constant volume is:

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = k_B \left(\frac{1}{\omega_X} + \frac{1}{\omega_Y} \right)$$

9.3 n particles

We now take $p = 1$ and consider the case of an arbitrary number n of particles. We start again with the classical case.

(f) (3 Punkte) Find the eigenfrequencies in this case.

Hint, Ansatz: $x_r(t) = \text{Re}\{Ae^{i\omega t} \sin(kr)\}$, where r equals the index of the masses. You might find the following relation useful:

$$\sin(k(r \pm 1)) = \sin(kr) \cos(k) \pm \cos(kr) \sin(k)$$

Solution:

$$X_r = \text{Re}\{Ae^{i\omega t} \sin(kr)\} = R \text{Re}\{A_r e^{i\omega t}\}$$

$$\ddot{X}_r = -\omega_0^2(2x_r - x_{r+1} - x_{r-1})$$

$$-\omega^2 A_r = -\omega_0^2(2A_r - A_{r+1} - A_{r-1})$$

$$A_r = A \sin(kr)$$

$$\sin(k(r \pm 1)) = \sin(kr) \cos(k) \pm \cos(kr) \sin(k)$$

$$A_{r+1} + A_{r-1} = 2A \sin(kr) \cos(k)$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 2(1 - \cos(k)) \Rightarrow \omega(k) = \omega_0 \sqrt{2(1 - \cos(k))}$$

Boundary conditions $X_0 = X_{n+1} = 0$:

$$X_0 = r \text{ fulfills } X_{n+1} \text{ as } \sin(k(n+1)) = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{\pi p}{n+1} \quad r = 1, 2, \dots, n$$

9.4 Quantum Thermodynamics again

(g) (3 Punkte) Consider now again the quantum mechanical case at temperature T for $n \rightarrow \infty$.

Hint:

$$\int_0^\infty \frac{x dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$$

Solution:

$$\langle E \rangle = \sum_p \left(\frac{\varepsilon_p}{e^{\beta \varepsilon_p} - 1} + \frac{1}{2} \varepsilon_p \right) \quad \varepsilon_p = \hbar \omega(k_p)$$

$$\frac{1}{n} \sum_\rho \Rightarrow \frac{1}{n} \int \frac{n+1}{\pi} dk = \int \frac{dh}{\pi}$$

$$\langle E \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{\pi} \frac{\hbar \omega_n(k)}{e^{\beta \hbar \omega_n(k)} - 1} + c$$

For $\beta \rightarrow T$ only small ω contribute:

$$W(\pi) = \omega_0 \sqrt{2(1 - \cos(A))} \approx \omega_0 \sqrt{\pi(1 - 1 + \frac{\pi^2}{2})}$$

$$\begin{aligned} & \approx \omega_0 \cdot k \\ \langle E \rangle &= \int_0^\infty \frac{dk}{\pi} \frac{\hbar \omega_n k}{e^{\beta \hbar \omega_0 k} - 1} \quad \beta \hbar \omega_0 h = x \\ & \frac{1}{\beta^3 \hbar \omega_0 \pi} \int_0^\infty \frac{dx x}{e^x - 1} = \frac{\pi (k_B T)^2}{6 \hbar \omega_0} \\ & \Rightarrow C_V = \frac{\pi k_B^2 T}{3 \hbar \omega_0} \end{aligned}$$